

Solución a "Pez contra corriente"

Enunciado:



Un pez nada contra corriente a una velocidad constante v . El agua tiene una velocidad w con respecto al suelo. El pez intenta alcanzar un punto a una distancia s (aguas arriba). La energía requerida para ello está determinada por la fricción del agua y por el tiempo necesario para alcanzar el objetivo. Los experimentos han demostrado que dicha energía es: $E(v) = \frac{c \cdot v^k \cdot s}{v - w}$, donde $c > 0$ y $k > 2$ son constantes; en particular k depende de la forma del pez. ¿Qué velocidad v minimiza la energía? ¿Cuánto vale dicha energía mínima?

Solución:

Calculamos la derivada primera de la función energía $E(v) = \frac{c \cdot v^k \cdot s}{v - w}$:

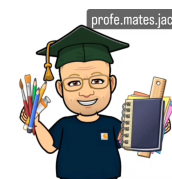
$$E'(v) = \frac{c \cdot s \cdot k \cdot v^{k-1} \cdot (v - w) - c \cdot v^k \cdot s}{(v - w)^2} = \frac{c \cdot s \cdot v^{k-1} \cdot (k \cdot v - k \cdot w - v)}{(v - w)^2}$$

$$E'(v) = 0 \Rightarrow k \cdot v - k \cdot w - v = 0 \Leftrightarrow v \cdot (k - 1) - k \cdot w = 0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{k \cdot w}{k - 1} \text{ (punto crítico)}$$

$$E'(v) = \frac{c \cdot s \cdot v^{k-1} \cdot (k \cdot v - k \cdot w - v)}{(v - w)^2} = c \cdot s \cdot \frac{v^{k-1} \cdot [(k - 1) \cdot v - k \cdot w]}{(v - w)^2} = c \cdot s \cdot \frac{v^k \cdot (k - 1) - k \cdot w \cdot v^{k-1}}{v^2 - 2 \cdot v \cdot w + w^2}$$

Su derivada segunda sería:

$$E''(v) = c \cdot s \cdot \frac{k \cdot (k - 1) \cdot v^{k-2} \cdot (v - w)^2 - 2 \cdot (k - 1) \cdot v^k + 2 \cdot k \cdot w \cdot v^{k-1}}{(v - w)^3}$$



evaluado en el punto crítico $v_0 = \frac{k \cdot w}{k-1}$ tenemos:

$$E''(v_0) = c \cdot s \cdot \frac{k \cdot (k-1) \cdot v_0^{k-2} \cdot (v_0 - w)^2 - 2 \cdot (k-1) \cdot v_0^k + 2 \cdot k \cdot w \cdot v_0^{k-1}}{(v_0 - w)^3}$$

El punto crítico era $v_0 = \frac{k \cdot w}{k-1} \Rightarrow k-1 = \frac{k \cdot w}{v_0}$ y por tanto $v_0 - w = \frac{w}{k-1}$.

Además (calculando por partes el numerador de la derivada segunda):

$$k \cdot (k-1) \cdot v_0^{k-2} \cdot (v_0 - w)^2 = k \cdot \frac{k \cdot w}{v_0} \cdot v_0^{k-2} \cdot \left(\frac{w}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \cdot w^3 \cdot v_0^{k-3} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \cdot w^3 \cdot \left(\frac{k-1}{k \cdot w}\right)^3 = \frac{k-1}{k}$$

$$- 2 \cdot (k-1) \cdot v_0^k = - 2 \cdot (k-1)^{1-k} \cdot k^k \cdot w^k$$

$$2 \cdot k \cdot w \cdot v_0^{k-1} = 2 \cdot k \cdot w \cdot \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \cdot w^{k-1} = 2 \cdot k^k \cdot w^k \cdot (k-1)^{1-k} \text{ (sumando que es igual al anterior$$

calculado salvo signo, por lo que como el anterior tenía signo negativo se simplifican en el numerador al sumarlos).

$$\text{El denominador quedaría: } (v_0 - w)^3 = \left(\frac{k \cdot w}{k-1} - w\right)^3 = \left(\frac{w}{k-1}\right)^3$$

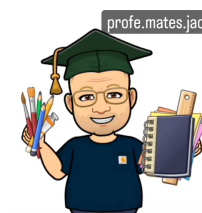
Con lo que al final nos queda:

$$E''(v_0) = c \cdot s \cdot \frac{k-1}{k} \div \left(\frac{w}{k-1}\right)^3 = c \cdot s \cdot \frac{(k-1)^4}{k^3 \cdot w^3} > 0, \text{ pues } c, s, w > 0 \text{ y } k > 2$$

Así pues, queda demostrado que **para $v_0 = \frac{k \cdot w}{k-1}$ la energía es mínima**. Veamos cuánto

es esta para dicho valor de la velocidad:

$$E(v_0) = c \cdot s \cdot \frac{v_0^k}{v_0 - w} = c \cdot s \cdot \left[\left(\frac{k \cdot w}{k-1}\right)^k \div \left(\frac{w}{k-1}\right) \right] = c \cdot s \cdot \frac{k^k \cdot w^k \cdot (k-1)}{w \cdot (k-1)^k}$$



con lo que simplificando nos quedaría:

$$E(v_0) = c \cdot s \cdot k^k \cdot (k-1)^{1-k} \cdot w^{k-1} \text{ (energía mínima)}$$