

Solución a "Uno de matrices"

Enunciado:

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^2 - 4A + 3I$.

b) Demuestra que la inversa A^{-1} de A es:

$$\frac{1}{3}(4I - A)$$

c) Halla la inversa de la matriz $A - 2I$. ¿Cómo se denomina una matriz así?

Solución:

a) Calculemos primero el cuadrado de la matriz A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculemos la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(A | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \text{ operamos con filas...}$$

$-2F_2 + F_1 \rightarrow F_1$; $F_3 + F_1 \rightarrow F_3$; $F_1 \leftrightarrow F_2$; $F_2 \leftrightarrow F_3$ y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right); F_3 + F_2 \rightarrow F_3, \text{ obteniendo:}$$



profe.mates.jac

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{3} \cdot F_3 \rightarrow F_3 \text{ y nos sale:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; F_1 + F_3 \rightarrow F_1; -2F_3 + F_2 \rightarrow F_2, \text{ con lo que nos sale:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \text{ por lo que la inversa de } \mathbf{A} \text{ sería: } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Calculemos y comprobemos si esa matriz inversa es:

$$\frac{1}{3} \cdot (4I - A) = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos su inversa:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; F_2 \leftrightarrow F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 2F_1 + F_3 \rightarrow F_3$$



$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; -F_2 \rightarrow F_2, \text{ obteniendo:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; 2F_2 + F_1 \rightarrow F_1; 2F_2 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; F_1 - F_3 \rightarrow F_1; F_2 - F_3 \rightarrow F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A - 2I \text{ (coincide con su inversa)}$$

Se trata de una matriz involutiva.

