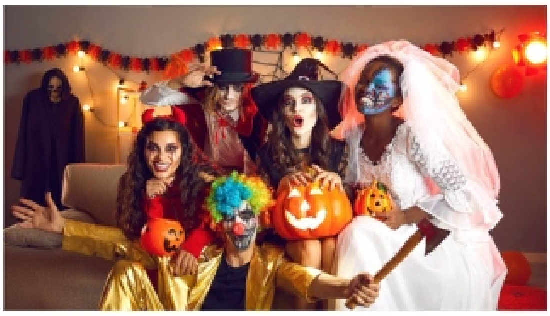
Solución a "La fiesta de disfraces de Halloween"

Enunciado:



Los estudiantes de 2º de Bachillerato están organizando una fiesta de disfraces de Halloween. Para asegurar que la fiesta sea un éxito y cumpla con las normas de seguridad y presupuesto, deben aplicar sus conocimientos de Matemáticas a las Ciencias Sociales.

1) *Análisis del éxito de la fiesta (Análisis)*

El nivel de popularidad $P(t)$ de la fiesta, medido en cientos de asistentes, se modela según la función $P(t)=\dfrac{10t}{t^2+9}$, donde t es el tiempo transcurrido en horas desde la apertura (0:00 h). Determina a qué hora la fiesta alcanza su máxima popularidad e indica cuál es su nivel. Halla el límite de la popularidad cuando el tiempo tiende a infinito.

2) *Optimización de la distribución de mesas (Optimización)*

La organización ha decidido limitar una zona VIP con forma rectangular para las mesas más importantes. Esta zona debe estar adyacente a la pared de cristal del salón, que mide 30 metros. Para delimitar la zona, sólo se dispone de 50 metros de cinta especial. Determina las dimensiones del rectángulo que maximizan el área de la zona VIP (pista: la zona adyacente a la pared de cristal no necesita cinta).

3) *Probabilidad de ingreso (Probabilidad)*

La organización estima que, debido al tiempo y al ambiente, hay dos filtros de ingresos a la fiesta: el 60% de los asistentes son socios (S) y el resto no, la probabilidad de que un socio venga disfrazado (D) es de 0.8 y la probabilidad de que un no socio venga disfrazado es de 0.5. Si se elige un asistente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no venga disfrazado?. Si se selecciona un asistente que no viene disfrazado ¿cuál es la probabilidad de que sea socio?

4) *Coste y beneficio (Álgebra matricial)*

El coste de los disfraces (C) y los beneficios obtenidos por las entradas (B) para los organizadores, en función del número de invitados de la mañana (M) y de la noche (N), se modelan mediante la siguiente relación matricial:

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 20 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$$

¿Es posible calcular de forma única el número de invitados M y N si se conocen los costes y los beneficios totales? Justifica tu respuesta usando el concepto de matriz inversa o el rango de una matriz.

Solución:

1) La función $P(t)=\dfrac{10t}{t^2+9}\ ;\ t\geq 0$ es continua y derivable.

Vamos a calcular su valor máximo y a qué hora se produce tal hecho:

$P'(t)=\dfrac{10\cdot(t^2+9)-2t\cdot 10t}{(t^2+9)^2}=\dfrac{90-10t^2}{(t^2+9)^2}$; se anula cuando $90=10t^2 \Leftrightarrow t^2=9 \Rightarrow t=3$

Calculemos su derivada segunda:

$$P''(t)=\frac{-20t\cdot(t^2+9)^2-2(t^2+9)\cdot 2t\cdot(90-10t^2)}{(t^2+9)^4}=\frac{-20t\cdot(t^2+9)-2\cdot 2t\cdot(90-10t^2)}{(t^2+9)^3}$$

$P''(t)=\dfrac{20t^3-540t}{(t^2+9)^3}$ *(derivada segunda)*

$P''(3)=\dfrac{-5}{27}<0$; por lo que para t = 3 hay un máximo. Y dicho máximo vale: $P(3)=\dfrac{5}{3}$ *(cientos)*

A las 3 a.m la fiesta alcanza su máxima popularidad con 167 asistentes (aprox.)

Cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{10t}{t^2+9}=0$

Cuando el tiempo tiende a infinito la popularidad tiende a cero

2) El rectángulo estaría formado por parte del lado de 30m de la pared de cristal del salón (no lleva cinta), el lado opuesto al cristal (que si lleva cinta; llamémosle ***x***) y otros dos lados iguales que también llevan cinta (llamémosle ***y***, a cada uno). Claramente $\mathbf{0<x\leq 30}$. Además la cantidad total de cinta $\mathbf{50=x+2y}$.

El área de dicha zona rectangular delimitada sería: $\mathbf{x\cdot y=A(x)=x\cdot\left(25-\frac{x}{2}\right)=25x-\frac{x^2}{2}}$

Hemos de encotrar para qué valores de ***x*** e ***y*** dicha área es máxima.

$A'(x)=25-x$; que es cero para ***x = 25***.

Su derivada segunda $A''(x)=-1$ y $A''(25)=-1<0$; por lo que hay un área máxima para x = 25. Como $A(25)=312.5$, resulta que ***dicha área máxima es de 312.5 m²***.

Y el valor de **y** es $y=25-\frac{25}{2}=\frac{25}{2}=12.5\ m$

Las dimensiones del rectángulo serían 25 x 25/2 metros (siendo 25 m la zona opuesta del rectángulo al lado del cristal y 25/2 m cada lado perpendicular al cristal).

3) Se tienen las siguiente probabilidades *(según el enunciado)*:

$P(S)=0.6\ ;\ P(\bar{S})=0.4\ ;\ P(D/S)=0.8\ ; P(D/\bar{S})=0.5$

$P(\bar{D})=1-P(D)$; siendo $P(D)=P(S)\cdot P(D/S)+P(\bar{S})\cdot P(D/\bar{S})=0.6\cdot 0.8+0.4\cdot 0.5=\frac{17}{25}$

Por lo que: $\boldsymbol{P(\bar{D})}=1-\frac{17}{25}=\frac{8}{25}=\boldsymbol{0.32}$ ***(probabilidad de que no venga disfrazado)***

Ahora tenemos que calcular $P(S/\bar{D})$:

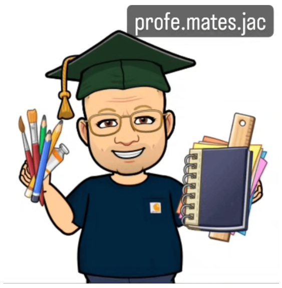
$P(S/\bar{D})=\frac{P(S\cap\bar{D})}{P(\bar{D})}$; pero sabemos que

$P(D/S)=0.8\Rightarrow P(\bar{D}/S)=0.2\Rightarrow P(\bar{D}\cap S)=0.2\cdot P(S)=0.2\cdot 0.6=0.12$

Finalmente:

$$\boldsymbol{P(S/\bar{D})}=\frac{P(S\cap\bar{D})}{P(\bar{D})}=\frac{0.12}{0.32}=\boldsymbol{\frac{3}{8}=0.375}$$

(si no viene disfrazado, probabilidad de que sea socio)



4) La siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix}10 & 15\\ 20 & 30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}M\\ N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}$ tiene como matriz de coeficientes a la matriz $\begin{pmatrix}10 & 15\\ 20 & 30\end{pmatrix}$ que no tiene inversa pues la segunda fila es la primera multiplicada por dos. Eso quiere decir que el sistema anterior quedaría reducido al sistema de ecuaciones: $\begin{cases}10M+15N=C\\ 20M+30N=B\end{cases}$, el cual, ***si B no es 2C no tendría solución (sistema incompatible)***. Y ***si B = 2C la segunda ecuación no aporta nada nuevo a la primera***, quedando sólo la ecuación $10M+15N=C$, donde sólo conocemos **C** y ***no sería posible encontrar de forma única los valores M y N (habría infinitas soluciones, sistema compatible indeterminado).***