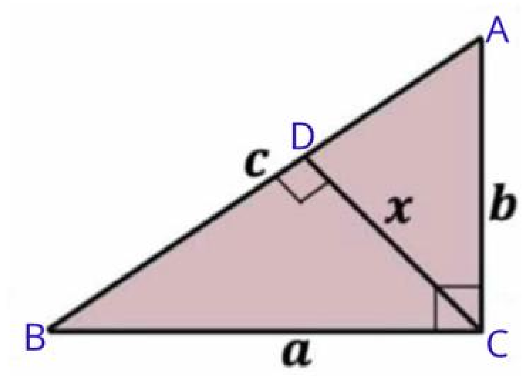
# Solución a “Altura en función de sus lados y algo más”

## Enunciado:




**Dado el triángulo rectángulo ΔABC (C=90º), contesta de forma razonada:**

*a)* *Averigua la altura* ***x*** *sobre la hipotenusa, en función de los tres lados (a, b y c) del triángulo.*

*b)* *Halla dicha altura* ***x****, si a=10 m y b=8 m.*

*c)* *En la figura se ven tres triángulos rectángulos; comprueba si los tres son semejantes y en caso afirmativo, halla con los datos del apartado anterior (a=10 m y b=8 m), la razón de semejanza del ΔABC respecto al ΔADC, así como las áreas de ambos. Comprueba que al dividir el área de ΔABC entre el área del ΔADC da el cuadrado de la razón de semejanza calculada.*

*d)* *Calcula las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa del mismo (en función de los tres lados: a, b y c).*

*e)* *Deduce las proyecciones de ambos catetos sobre la hipotenusa, usando los datos del apartado* ***b****.*

*f)* *Comprueba el teorema del cateto (para ambos catetos) y el teorema de la hipotenusa, usando los datos del apartado* ***b****.*

## Solución:

*a)* El área del triángulo ***ΔABC*** es: $A_{tri}=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot x}{2}\Leftrightarrow a\cdot b=c\cdot x\Leftrightarrow x=\frac{a\cdot b}{c}$

*Otra forma:*

Por el teorema de la altura en el triángulo rectángulo ABC se tiene que: $x^2=AD\cdot BD$

Por el teorema de los catetos en dicho triángulo Δ*ABC*: $b^2=AD\cdot c$ y $a^2=BD\cdot c$

Además: $c^2=a^2+b^2$ y $AD+BD=c$

Llamemos por comodidad $p=AD$ ; entonces $BD=c-p$ y también:

$$AD=\frac{b^2}{c} \text{ y } BD=c-p=\frac{a^2}{c}$$

Luego: $x^2=AD\cdot BD=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{a^2}{c}=\frac{a^2\cdot b^2}{c^2}$

Finalmente: $x=\sqrt{\frac{a^2\cdot b^2}{c^2}}=\frac{a\cdot b}{c}$

*La altura **x** sobre la hipotenusa es el cociente entre el producto de los dos catetos y la hipotenusa.*

**b)** $c^2=10^2+8^2=164\Rightarrow c=2\cdot\sqrt{41}$ y la altura ***x*** será de: $x=\frac{10\cdot 8}{2\cdot\sqrt{41}}=\frac{40}{\sqrt{41}}=\frac{40\cdot\sqrt{41}}{41}\approx 6´24695$

*La altura **x**, siendo a=10 m y b=8 m sería de **x**=6´247 m (aprox.)*

**c)** Los tres son semejantes porque:

**Δ*ABC*** y **Δ*ACD*** tienen los tres ángulos iguales *(ángulo recto y ángulo A en ambos son iguales)*.

**Δ*ABC*** y **Δ*BCD*** tienen los tres ángulos iguales *(ángulo recto y ángulo B en ambos son iguales)*.

*Por tanto los triángulos* **Δ*BCD*** y **Δ*ACD*** son semejantes (ángulo recto, y ángulo C en el primero coincide con el ángulo A en el segundo).

La razón de semejanza del **Δ*ABC*** respecto al **Δ*ADC*** sería: $r=\frac{c}{b}=\frac{b}{AD}=\frac{a}{x}$

Sabiendo que $AD^2=b^2-x^2=64-\frac{1600}{41}=\frac{1024}{41}\Rightarrow AD=\frac{32\cdot\sqrt{41}}{41}$ , tenemos:

$$r=\frac{2\cdot\sqrt{41}}{8}=\frac{8}{AD}=\frac{10}{\frac{40\cdot\sqrt{41}}{41}}\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{41}}{4}=8\div\left(\frac{32\cdot\sqrt{41}}{41}\right)=10\div\left(\frac{40\cdot\sqrt{41}}{41}\right)$$

Pues: $8\div\left(\frac{32\cdot\sqrt{41}}{41}\right)=\frac{\sqrt{41}}{4}$ y $10\div\left(\frac{40\cdot\sqrt{41}}{41}\right)=\frac{\sqrt{41}}{4}$

La razón de semejanza r es $\dfrac{\sqrt{41}}{4}$

Área de ambos:

$$A_{ABC}=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{80}{2}=40\ u^2$$ *(área del triángulo ∆**ABC**)*

$$A_{ACD}=\frac{AD\cdot x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{32\sqrt{41}}{41}\cdot\frac{40\cdot\sqrt{41}}{41}=\frac{16\cdot 40}{41}=\frac{640}{41}\ u^2$$ (área del triángulo ∆***ACD***)

$$A_{ABC}\div A_{ACD}=40\div\frac{640}{41}=\frac{41}{16}=\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2=r^2$$ *(comprobado)*

***d)*** Ambas proyecciones son:

Proyección del cateto ***b*** sobre la hipotenusa ***c***: ***AD***

Proyección del cateto ***a*** sobre la hipotenusa ***c***: ***BD***

Por el teorema de los catetos se tiene:

$b^2=AD\cdot c$ y $a^2=BD\cdot c$ ; por lo que:

$$AD=\frac{b^2}{c} \text{ y } BD=\frac{a^2}{c}$$ (proyecciones en función de los lados)

***e)*** En el apartado ***b*** teníamos: *a=10*, *b=8* y $c=2\cdot\sqrt{41}$ ; *las proyecciones serían, en este caso:*

$$AD=\frac{64}{2\cdot\sqrt{41}}=\frac{32\cdot\sqrt{41}}{41}\ m$$ *(calculada en apdo.* ***c****)*

$$BD=\frac{100}{2\cdot\sqrt{41}}=\frac{50\cdot\sqrt{41}}{41}\ m$$

***f)*** En el apartado ***b*** teníamos: *a=10*, *b=8* y $c=2\cdot\sqrt{41}$

*Teorema del cateto:*

$$64=b^2=AD\cdot c=\frac{32\cdot\sqrt{41}}{41}\cdot 2\sqrt{41}$$ (comprobado)

$$100=a^2=BD\cdot c=\frac{50\cdot\sqrt{41}}{41}\cdot 2\sqrt{41}$$ (comprobado)

*Teorema de la altura (sobre la hipotenusa):*

$$\frac{1600}{41}=x^2=AD\cdot BD=\frac{32\cdot\sqrt{41}}{41}\cdot\frac{50\cdot\sqrt{41}}{41}$$ (comprobado)