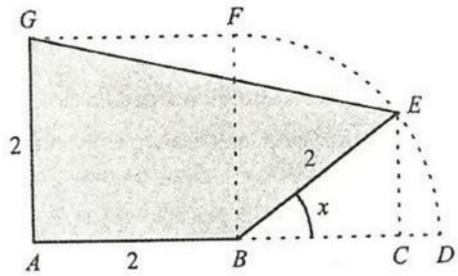
Solución a "Área de un cuadrilátero ABEG"

Enunciado:



Se tiene el cuadrilátero ABEG dado en la figura.

a) *Demuestra que el área de dicho cuadrilátero es:*

$$A(x)=2\cdot(1+sen\,x+\cos x)\ ;\ x\in\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

b) *Determina* $A(0)$ *y* $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *e interpreta los resultados.*

c) *¿Para qué valores de* x *el área es de 4.3* u^2 *?*

d) *¿Para qué valores de* x *dicha área es máxima? ¿Cuál es el valor máximo de la misma?*

e) *Estudia los intervalos de monotonía de la función área y también la concavidad de la misma.*

Solución:

a) El área del cuadrilátero ***ABEG*** es igual al área del trapecio rectángulo ***ACEG*** menos el área del triángulo rectángulo **Δ*BCE***. Calculemos los lados ***BC*** y ***EC***. Claramente $BC=2\cdot\cos x$ y $EC=2\cdot sen\,x$, siendo ***x*** un ángulo en radianes entre 0 y π/2 radianes (basta mirar el triángulo rectángulo **Δ*BCE***). Por lo que:

Área del trapecio rectángulo ***ACEG***:

$$A_{ACEG}=\frac{(2+EC)\cdot(2+BC)}{2}=\frac{(2+2\,sen\,x)\cdot(2+2\cos x)}{2}=\frac{2\cdot(1+sen\,x)\cdot(2+2\cos x)}{2}=$$

$$=(1+sen\,x)\cdot(2+2\cos x)=2+2\cos x+2\,sen\,x+2\,sen\,x\cdot\cos x$$

Área del triángulo rectángulo **Δ*BCE*** :

$$A_{BCE}=\frac{BC\cdot CE}{2}=\frac{2\cos x\cdot 2\,sen\,x}{2}=2\,sen\,x\cdot\cos x$$

Por lo que *el área del cuadrilátero **ABEG** es:*

$$A(x) = A_{ACEG} - A_{BCE} = 2 + 2\cos x + 2\,sen\,x + 2\,sen\,x \cdot \cos x - 2\,senx \cdot \cos x =$$

$$= 2 \cdot (1 + sen\,x + cos\,x)\ ;\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

(demostrado)

b) $A(0) = 4$; *4 unidades cuadradas que se corresponde con el área del triángulo rectángulo **ΔAGD** (no se tiene en este caso un cuadrilátero sino un triángulo rectángulo de catetos GA=2 y AD=4 (pues BC=2*cos 0)).*

$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$; *4 unidades cuadradas que se corresponde con el área del cuadrado **ABFG** de lado 2.*

O sea que *para x=0 tenemos un triángulo rectángulo y para x=π/2 tenemos un cuadrado*.

c) Planteamos la ecuación: $4.3 = A(x) = 2 \cdot (1 + sen\,x + \cos x)\ ;\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

De donde: $\frac{23}{20} = sen\,x + \cos x \Leftrightarrow \cos x = \left(\frac{23}{20} - sen\,x\right) \Rightarrow \cos^2 x = \left(\frac{23}{20} - sen\,x\right)^2$

Por otra parte, sabemos que: $sen^2\,x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - sen^2\,x$

Así pues: $1 - sen^2\,x = \left(\frac{23}{20} - sen\,x\right)^2 = \frac{529}{400} - \frac{23}{10} \cdot sen\,x + sen^2\,x \Leftrightarrow 2 \cdot sen^2\,x - \frac{23}{10} \cdot sen\,x + \frac{129}{400} = 0$

Si llamamos $z = sen\,x$ nos queda la ecuación de segundo grado: $2z^2 - \frac{23}{10}z + \frac{129}{400} = 0$, que equivale a: $800z^2 - 920z + 129 = 0$ y cuyas soluciones son: $z = \frac{23 \pm \sqrt{271}}{40}$.

Si $z = \frac{23 + \sqrt{271}}{40}$, $sen\,x = \frac{23 + \sqrt{271}}{40} \Rightarrow x \approx 1.406612\ rad$ *(valor de **x** para el cual el área es de 4.3 u^2)*

Si $z = \frac{23 - \sqrt{271}}{40}$, $sen\,x = \frac{23 - \sqrt{271}}{40} \Rightarrow x \approx 0.164185\ rad$ *(valor de **x** para el cual el área es de 4.3 u^2)*

d) Calculamos la derivada de ***A(x)***:

$$A'(x)=2\cdot(\cos x-\operatorname{sen} x)$$ que será cero en $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ sólo cuando $x=\frac{\pi}{4}$.

Su derivada segunda es: $A''(x)=2\cdot(-\operatorname{sen} x-\cos x)=-2\cdot(\operatorname{sen} x+\cos x)$

Y en $x=\frac{\pi}{4}$ vale: $A''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}<0$

*Hay un máximo de **A(x)** para* $x=\frac{\pi}{4}$ *y vale:*

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2+2\sqrt{2}$$ *(nótese que A(0) = A(π/2) = 4 (valores en los extremos del intervalo* $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$*)).*

e) Monotonía de la función ***A(x)***:

$$A'(x)=2\cdot(\cos x-\operatorname{sen} x)\ ;\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

	(0, π/4)	**(π/4, π/2)**
Signo $A'(x)$	Positivo	Negativo

*La función área **A(x)** es:*

Estrictamente creciente en el intervalo (0, π/4) y estrictamente decreciente en el intervalo (π/4, π/2).

Concavidad de la función ***A(x)***:

$A''(x)=-2\cdot(\operatorname{sen} x+\cos x)\ ;\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$; y en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ resulta que $A''(x)<0\ ;\ \forall\, x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, por lo que ***la función A(x) es cóncava*** o cóncava hacia abajo.