Solución a “Cestas de Navidad”

Enunciado:

Durante la campaña de Navidad, una tienda vende **cestas de productos navideños**.

- Sea x el **número de cestas producidas y vendidas**.
- Sea z el **precio de venta de cada cesta**, en euros.

El **coste total** de producción viene dado por la función: $C(x) = 12x + 600$, donde los **600 €** representan costes fijos.

La **función de demanda**, que expresa el número de cestas que se demandan en función del precio, viene dada por: $D(z) = 1200 - 10z$

Inicialmente, la tienda fija el precio de venta de cada cesta en **45 €**.

Además:

- Si se venden **más de 700 cestas**, la tienda debe contratar personal extra, lo que supone un **coste fijo adicional de 400 €**.
- Sobre el beneficio obtenido se paga un **25 % de impuestos**.

Preguntas

a) Escribe la **función de ingresos** en función del número de cestas vendidas.

b) Calcula cuántas cestas se venderán si el precio es de **45 €**, utilizando la función de demanda.

c) Calcula el **beneficio antes de impuestos**, teniendo en cuenta todos los costes.

d) Determina el **beneficio neto** tras aplicar los impuestos.

e) Halla el **umbral de rentabilidad** (número mínimo de cestas que deben venderse para no tener pérdidas).

f) Justifica, apoyándote en los cálculos realizados, si sería conveniente **modificar el precio** para aumentar el beneficio durante la campaña de Navidad.

Solución:

a) Se tiene que $x = D(z) = 1200 - 10z \Leftrightarrow z = \dfrac{1200 - x}{10}$ (al ser ***x*** el número de cestas producidas (demanda) y vendidas).

Por lo que la función ingresos pedida será:

$$I(x)=D(z)\cdot z=x\cdot z=x\cdot\left(\frac{1200-x}{10}\right)=120x-\frac{x^2}{10}$$ ***(función ingresos en función de las cestas producidas y vendidas: x)***

b) $z=45\Rightarrow D(45)=1200-10\cdot 45=750$

Se venderán 750 cestas a un precio de 45€ cada una.

c) La función beneficio es *Ingresos – Costes*

Ingresos: $I(x)=120x-\frac{x^2}{10}$

Costes: $C(x)=\begin{cases}12x+600 & si\ \ x\le 700\\ 12x+1000 & si\ \ x>700\end{cases}$ (*en la 2ª rama se incluyen los 400€ de coste adicional*)

Con lo que la función beneficio será:

$$B(x)=I(x)-C(x)=\begin{cases}108x-\frac{x^2}{10}-600 & si\ \ x\le 700\\ 108x-\frac{x^2}{10}-1000 & si\ \ x>700\end{cases}$$

Y $B(750)=108\cdot 750-\frac{750^2}{10}-1000=23750$ € *(beneficio para 750 cestas vendidas a un precio de 45€ cada una).*

d) El beneficio neto, tras impuestos, será el 75% del beneficio obtenido en el apartado anterior, es decir:

$$B_n(x)=\begin{cases}81x-\frac{3x^2}{40}-450 & si\ \ x\le 700\\ 81x-\frac{3x^2}{40}-750 & si\ \ x>700\end{cases}$$

Y $B_n(750)=81\cdot 750-\frac{3\cdot 750^2}{40}-750=17812´5$ € *(beneficio neto para 750 cestas vendidas a un precio de 45€ cada una)*

e) Ha de cumplirse que $B(x)\geq 0$ ¿x_{min}?

Consideremos dos casos:

I) $x\leq 700$; entonces: $108x-\frac{x^2}{10}-600\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1080x+6000\leq 0 \Rightarrow x_{min}=6$

II) $x>700$; entonces: $108x-\frac{x^2}{10}-1000\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1080x+10000\leq 0 \Rightarrow x_{min}=701$ *(menor entero posible en esta rama)*

Por lo que el número mínimo de cestas que han de venderse para no obtener pérdidas es de 6.

f) Con un precio inicial de 45€, tendríamos que $z=45 \Rightarrow x=D(45)=750$ y obtendríamos un beneficio neto de $B_n(750)=17812'5$ €.

Estudiemos los máximos locales de la función $B_n(x)$; para ello la estudiamos en los intervalos: $x\in[0,700]$ y $x\in(700,+\infty)$

Caso I) En $[0,700]$, $0=B'_n(x)=81-\frac{3x}{20} \Leftrightarrow x=540$ y $B''_n(540)=\frac{-3}{20}<0$; luego para x=540 hay un máximo local.

Además: $B_n(0)=-450$, $B_n(540)=21420$ y $B_n(700)=19500$

Por lo que el máximo absoluto en el intervalo $[0,700]$ es ***21420€*** (beneficio neto).

Caso II) En $x\in(700,+\infty)$, $B'_n(x)=81-\frac{3x}{20}<0$ y la función $B_n(x)$ es estrictamente decreciente, con lo que no hay un máximo local en dicho intervalo.

Así pues, el máximo de la función beneficio neto se tiene para ***x=540 cestas producidas y vendidas*** y sería de ***21420€*** (beneficio neto máximo).

Pero ***x=540*** se corresponde con $z=\frac{1200-540}{10}=66\ €$.

Así pues, es conveniente modificar el precio inicial de 45€/cesta hasta los 66€/cesta para obtener un beneficio neto máximo en la venta de las 540 cestas.