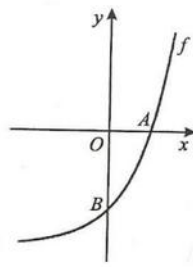


# Solución a “Demuestra que $c=e$ y otras cuestiones”

## Enunciado:



Sea  $c$  un número real mayor que 1. En la figura está representada una parte del gráfico de la función  $f(x) = e^x - c$ .  $A$  es el punto de intersección de  $f$  con el eje  $OX$  (eje  $x$ ).  $B$  es el punto de intersección de  $f$  con el eje  $OY$  (eje  $y$ ).

- Demuestra que, si la pendiente de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  es  $m = c - 1$ , entonces  $c = e$ .
- Tomando  $c = e$ , halla la ecuación de la recta que pasa por  $A$  y  $B$ . Calcula su ecuación en forma punto pendiente y también sus ecuaciones paramétricas.
- Para  $c = e$ , calcula la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = e^x - e$  en el punto  $A$  y también en el punto  $B$ . ¿Coinciden algunas de estas rectas con la recta que pasa por  $A$  y  $B$ ?
- Para  $c = e$ , calcula el área del triángulo  $\triangle OAB$ , donde  $O$  es el origen de coordenadas.
- Para  $c > 1$ , expresa la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  en función de  $c$ . Después evalúa dicha distancia cuando  $c = e$ .
- Estudia la monotonía y concavidad de la función  $y = e^x - e$ . ¿Hay extremos relativos o puntos de inflexión? ¿Tiene dicha función alguna asíntota?

## Solución:

- a)** Las coordenadas respectivas de los puntos  $A$  y  $B$  son:  $A(\ln c, 0)$  y  $B(0, 1 - c)$ , pues la abscisa del punto  $A$  es el valor de  $x$  que hace que  $f(x) = 0$  y la ordenada del punto  $B$  es  $f(0)$ .

La pendiente de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  sería:  $m_{AB} = \frac{1 - c - 0}{0 - \ln c} = \frac{c - 1}{\ln c}$ ; si esa

pendiente, como se dice, es  $c - 1$  entonces:  $c - 1 = \frac{c - 1}{\ln c} \Leftrightarrow \ln c = 1 \Leftrightarrow c = e$  (al ser  $c > 1$ ).

**Por tanto, queda demostrado que si la pendiente de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  es  $c - 1$  entonces  $c = e$ .**

- b)** Ahora  $c = e$ ; calculemos la ecuación de la recta que pasa por  $A$  y  $B$ .

$$\text{Pendiente: } m_{AB} = \frac{c - 1}{\ln c} = c - 1 = e - 1$$

$$\text{Punto: } A(\ln c, 0) = (1, 0)$$

Punto:  $B(0, 1-c) = (0, 1-e)$

Ecuación de la recta que pasa por  $A(1, 0)$  y  $B(0, 1-e)$ :  $y = (e-1)x + 1 - e$

Ecuación de la recta en forma punto-pendiente:  $r_{AB} \equiv y - 0 = (e-1) \cdot (x-1)$

Veamos sus ecuaciones paramétricas:

Vector director:  $\vec{BA} = (1, e-1)$ ; punto  $A(1, 0)$ , con lo que las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = (e-1)\lambda \end{cases}, (\lambda \in \mathbb{R}).$$

c) Tenemos que  $c = e$

Curva:  $f(x) = e^x - e$

Ecuación de la recta tangente a una curva  $f$  en el punto  $P(x_0, y_0)$ :  
 $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

En nuestro caso tenemos que  $f'(x) = e^x$

En el punto  $A(1, 0)$ :  $r_A \equiv y - 0 = e \cdot (x - 1) \equiv y = e \cdot (x - 1)$

En el punto  $B(0, 1-e)$ :  $r_B \equiv y - (1-e) = 1 \cdot (x - 0) \equiv y = x + 1 - e$

La recta que pasa por  $A$  y  $B$  es

$r_{AB} \equiv y - 0 = (e-1) \cdot (x-1) \equiv y = e \cdot (x-1) + 1 - e$

**Por tanto, no coinciden ninguna de las rectas con la recta que pasa por  $A$  y  $B$ .**

d) Tenemos que  $c = e$

El triángulo  $\Delta OAB$  es un triángulo rectángulo cuyos catetos son  $|OB|$  y  $|OA|$ , es decir:

$|OB| = e-1$  y  $|OA| = 1$ , por lo que su área es:

$$A_{OAB} = \frac{e-1}{2} u^2 \text{ (unidades cuadradas)}$$

e) Tenemos que  $c > 1$ . Los puntos  $A$  y  $B$ , ahora, son  $A(\ln c, 0)$  y  $B(0, 1-c)$ .

La distancia entre ambos es:

$$d(A, B) = \sqrt{(\ln c)^2 + (c-1)^2}$$

Para  $c = e$  tenemos:  $d(A, B) = \sqrt{1 + (e-1)^2}$

f) Monotonía y concavidad de  $f(x) = e^x - e$ :

Monotonía

$f'(x) = e^x > 0$ , para todo  $x$  real. Por lo que **la función  $f$  es estrictamente creciente en todo su dominio.**

Concavidad

$f''(x) = e^x > 0$ , para todo  $x$  real. **Por lo que la función  $f$  es convexa o cóncava hacia arriba en todo su dominio.**

**Al ser  $f$  estrictamente creciente y ser convexa no hay puntos extremos (máximos ni mínimos locales) ni puntos de inflexión.**

**Esta función no posee ningún tipo de asíntota vertical ni oblicua. Además:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - e) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - e) = -e$$

**Por lo que tiene una asíntota horizontal  $y = -e$**