Solución a “El joyero torpe”

Enunciado:

*Un rubí pesó **p** gramos y vale **V** €. Pero el joyero comete una torpeza y se le rompe en dos trozos, uno de los cuales pesa **x** gramos. El caso es que los rubíes, cuanto más gordos sean, más se cotizan; en concreto, el valor de un rubí es directamente proporcional a la raíz cuadrada del cubo de su peso.*

a) *Calcular la depreciación, **D(x)**, en el precio inicial **V** del rubí a causa de su rotura.*

b) *Determinar **x** para que la depreciación sea máxima y obtener esta.*

c) *Si el valor del rubí fuera directamente proporcional al **peso**$^{\alpha}$ (con $\alpha>1$) ¿qué **x** maximiza la depreciación? (resolver en función de α).*

Solución:

a) Un trozo pesa ***x*** gramos y el otro ***p-x*** gramos. Sabemos que $V=k\cdot p^{3/2}$, luego $k=\dfrac{V}{p^{3/2}}$.

También tenemos que $V_x=k\cdot x^{3/2}$ y $V_{p-x}=k\cdot(p-x)^{3/2}$

$$D(x)=V-(V_x+V_{p-x})=k\cdot p^{3/2}-(k\cdot x^{3/2}+k\cdot(p-x)^{3/2})=V-\left(V\cdot\frac{x^{3/2}}{p^{3/2}}+V\cdot\frac{(p-x)^{3/2}}{p^{3/2}}\right)$$

O sea: $D(x)=V\cdot\left(1-\dfrac{x^{3/2}+(p-x)^{3/2}}{p^{3/2}}\right)$ (***siendo 0<x<p***).

b) Pongamos $D(x)=V\cdot\left(\dfrac{p^{3/2}-x^{3/2}-(p-x)^{3/2}}{p^{3/2}}\right)=\dfrac{V}{p^{3/2}}\cdot\left(p^{3/2}-x^{3/2}-(p-x)^{3/2}\right)$

Calculemos su derivada primera e igualemos a cero:

$$D'(x)=\frac{V}{p^{3/2}}\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot x^{1/2}+\frac{3}{2}\cdot(p-x)^{1/2}\right)=\frac{3V}{2p^{3/2}}\cdot\left((p-x)^{1/2}-x^{1/2}\right)$$

$D'(x)=0\Leftrightarrow p-x=x\Leftrightarrow x=\frac{p}{2}$ *(la mitad del peso original)*

$$D''(x)=\frac{3V}{2p^{3/2}}\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot(p-x)^{-1/2}-\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\right)$$

$D''\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{3V}{2p^{3/2}}\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{-1/2}\right)=\frac{3V}{2p^{3/2}}\cdot\left(-\left(\frac{p}{2}\right)^{-1/2}\right)=\frac{-3V}{\sqrt{2}\cdot p^2}<0$ *(al ser V positivo)*

Por tanto, para $x=\frac{p}{2}$***, la depreciación es máxima*** y vale:

Como $D(x)=\frac{V}{p^{3/2}}\cdot\left(p^{3/2}-x^{3/2}-(p-x)^{3/2}\right)$ entonces

$$D\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{V}{p^{3/2}}\cdot\left(p^{3/2}-\left(\frac{p}{2}\right)^{3/2}-\left(\frac{p}{2}\right)^{3/2}\right)=\frac{V}{p^{3/2}}\cdot\left(p^{3/2}-\frac{p^{3/2}}{2^{1/2}}\right)=\frac{V}{p^{3/2}}\cdot p^{3/2}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=V\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

(La depreciación máxima es de un 29,29% aprox. del valor original V.)

c) Ahora tenemos que $V=k\cdot p^{\alpha}$, siendo $\alpha>1$. Luego $k=\frac{V}{p^{\alpha}}$.

Y $V_x=k\cdot x^{\alpha}$ y $V_{p-x}=k\cdot(p-x)^{\alpha}$

$$D(x)=V-(V_x+V_{p-x})=k\cdot p^{\alpha}-(k\cdot x^{\alpha}+k\cdot(p-x)^{\alpha})=V-\left(V\cdot\frac{x^{\alpha}}{p^{\alpha}}+V\cdot\frac{(p-x)^{\alpha}}{p^{\alpha}}\right)$$

$D(x)=V\cdot\left(1-\frac{x^{\alpha}}{p^{\alpha}}-\frac{(p-x)^{\alpha}}{p^{\alpha}}\right)=\frac{V}{p^{\alpha}}\cdot\left(p^{\alpha}-x^{\alpha}-(p-x)^{\alpha}\right)$ ***(siendo 0<x<p y α>1)***

Calculemos su derivada primera e igualemos a cero:

$$D'(x)=\frac{V\cdot\alpha}{p^{\alpha}}\cdot\left((p-x)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}\right)$$

$0=D'(x)\Leftrightarrow p-x=x\Leftrightarrow x=\frac{p}{2}$ *(la mitad del peso original)*

Y $D''(x)=\alpha\left((1-\alpha)\cdot\left((p-x)^{\alpha-2}+x^{\alpha-2}\right)\right)=\frac{V\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)}{p^{\alpha}}\cdot\left((p-x)^{\alpha-2}+x^{\alpha-2}\right)$

Por lo que: $D''\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{V\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)}{p^{\alpha}}\cdot\left(\frac{p^{\alpha-2}}{2^{\alpha-3}}\right)=\frac{V\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)}{p^{2}\cdot 2^{\alpha-3}}<0$ (al ser $\alpha>1$).

Por tanto, ***para*** $x=\frac{p}{2}$***, la depreciación también es máxima y vale:***

$$D\left(\frac{p}{2}\right)=V\cdot\left(1-2^{1-\alpha}\right) \textit{ (compruébese)}$$