Solución a “Hantavirus en alta mar”

Enunciado:

Un buque mercante procedente de Sudamérica llega a un puerto europeo con sospecha de estar contaminado por una cepa especialmente agresiva de hantavirus: ANDES.

El barco transporta exactamente ***200*** contenedores y un total de ***150*** personas. Tras los primeros análisis, se decide poner el barco en cuarentena.

Se sabe que la probabilidad de que un contenedor esté contaminado es ***p = 0’045***, de forma independiente unos de otros.

A continuación, responde a las siguientes cuestiones:

1) Sea ***X*** el número de contenedores contaminados.

1.1) Calcula la probabilidad de que exactamente 5 contenedores estén contaminados.

1.2) Calcula la probabilidad de que haya más de 10 contenedores contaminados.

1.3) Calcula el número esperado de contenedores contaminados.

2) El nivel medio de contaminación del barco se modela mediante la función:

$N(t) = -0'02 \cdot t^2 + 1'2 \cdot t + 5$

donde ***N(t)*** representa el nivel de contaminación (en unidades arbitrarias) y ***t*** es el tiempo (en días) desde la detección inicial.

2.1) ¿En qué día se alcanza el nivel máximo de contaminación?

2.2) ¿Cuál será ese nivel máximo?

2.3) ¿A partir de qué día comienza a disminuir el nivel de contaminación?

3) La tasa de propagación del virus en la tripulación infectada viene dada por la función $P(t) = 15 \cdot e^{0'25t}$, donde ***P(t)*** es el número de personas infectadas y ***t*** el tiempo en días.

3.a) Calcula la tasa instantánea de propagación en el segundo día.

3.b) ¿Cuánto aumentará aproximadamente el número de infectados entre el segundo día y el cuarto día?.

4) La concentración del virus en el aire del barco (en partículas/m^3) está dada por la función:

$V(t) = 120 \cdot e^{-0'3t} + 8$, donde ***t*** está en horas.

4.a) Calcula la concentración acumulada del virus en el aire durante las primeras 8 horas.

4.b) ¿Qué significa este valor en el contexto del problema?

5) Se quiere diseñar un sistema de ventilación en el barco que minimice la concentración acumulada del virus en el aire. El coste del sistema viene dado por la función:

$C(x) = x^2 - 14 \cdot x + 60$, donde ***x*** representa la potencia del sistema (en kW).

5.a) ¿Qué potencia debe tener el sistema para que el coste sea mínimo?

5.b) ¿Cuál será el coste mínimo?

6) Si la tasa de mortalidad de la cepa ANDES es del 38% y se estima que 80 personas del barco podría llegar a infectarse, ¿cuál es el número esperado de fallecimientos? Justifica tu respuesta.

Solución:

Llamemos X a la variable aleatoria: ***X***={*número de contenedores contaminados*} ; sigue una distribución binomial $X \sim B(200\,,0´045)$. Entonces, tenemos que: n = 200 , p = 0´045 y q = 0´955.

Sabemos que en este caso de distribuciones $P(X=r)=\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$

1.1) En nuestro caso: $P(X=5)=\binom{200}{5}\cdot 0´045^5\cdot 0´955^{195}\approx \mathbf{0´0589942}$

1.2) $P(X>10)=1-P(X\le 10)=1-\left(\sum_{r=0}^{10} P(X=r)\right)$

$$P(X=0)=\binom{200}{0}\cdot 0´045^0\cdot 0´955^{200}\approx 0´0001002$$

$$P(X=1)=\binom{200}{1}\cdot 0´045^1\cdot 0´955^{199}\approx 0´0009439$$

$$P(X=2)=\binom{200}{2}\cdot 0´045^2\cdot 0´955^{198}\approx 0´0044253$$

$$P(X=3)=\binom{200}{3}\cdot 0´045^3\cdot 0´955^{197}\approx 0´0137625$$

$$P(X=4)=\binom{200}{4}\cdot 0´045^4\cdot 0´955^{196}\approx 0´0319385$$

$$P(X=5)=\binom{200}{5}\cdot 0´045^5\cdot 0´955^{195}\approx 0´0589942$$

$$P(X=6)=\binom{200}{6}\cdot 0´045^6\cdot 0´955^{194}\approx 0´0903445$$

$$P(X=7)=\binom{200}{7}\cdot 0´045^7\cdot 0´955^{193}\approx 0´1179817$$

$$P(X=8)=\binom{200}{8}\cdot 0´045^8\cdot 0´955^{192}\approx 0´1341193$$

$$P(X=9)=\binom{200}{9}\cdot 0´045^9\cdot 0´955^{191}\approx 0´1348215$$

$$P(X=10)=\binom{200}{10}\cdot 0´045^{10}\cdot 0´955^{190}\approx 0´1213393$$

Y la suma de esas 11 probabilidades nos da aproximadamente:

$$\left(\sum_{r=0}^{10} P(X=r)\right) \approx 0'7087709$$

Con lo que: $P(X>10)=1-P(X\leq 10)\approx 1-0´7087709=0'2912291$

1.3) El número esperado de contenedores contaminados es:

$$E(X)=n\cdot p=200\cdot 0´045=9$$

9 contenedores se esperan que estén contaminados.

2.1) Para hallar el máximo de la función N(t) se hace mediante la derivada:

$$N'(t)=-0´04\cdot t+1'2=0 \Leftrightarrow t=30$$

$N''(t)=-0'04 \Rightarrow N''(30)=-0´04<0$; por lo que dicha función para ***t=30*** tiene un máximo local que vale: $N(30)=-0´02\cdot 30^2+1'2\cdot 30+5=23$

Pero el dominio de dicha función sería $[0, 30+5\cdot\sqrt{46}]$ pues:

$$N(t)=0 \Rightarrow t=\frac{-1´2-\sqrt{1´2^2+20\cdot 0´02}}{-0´04}=30+5\cdot\sqrt{46}\approx 63'9116$$ (pues $t\geq 0$).

Y en dicho dominio la función ***N(t)*** es una parábola con las ramas hacia abajo (función cóncava) en la que $N(0)=5$ y $N(30+5\cdot\sqrt{46})=0$, por lo que el máximo de dicha función se alcanza para ***t=30*** y vale ***N(30)=23***.

El nivel máximo de contaminación se alcanza en el día 30 desde la detección inicial.

2.2) *El nivel máximo sería de 23 unidades (por lo visto en el apartado anterior)*

2.3) *El nivel de contaminación empieza a disminuir a partir del día 30* pues ***N'(t)<0*** solo cuando ***t>30*** (***N(t)*** sería estrictamente decreciente a partir de dicho valor: $N'(t)=-0´04\cdot t+1'2<0 \Leftrightarrow t>30$).

3.a) Calculemos ***P'(2)***:

$P'(t)=3'75\cdot e^{0'25\cdot t} \Rightarrow P'(2)=3'75\cdot e^{0'5}=3'75\cdot\sqrt{e}\approx 6'1827$ *(6´1827 personas/día)*

3.b) Calculemos ***P(4)-P(2)***:

$$P(4)-P(2)=15\cdot e-15\cdot e^{0'5}=15\cdot(e-\sqrt{e})\approx 16$$

Entre el segundo y el cuarto día aumentará en 16 el número de infectados.

4.a) Hemos de calcular $\int_0^8 V(t)\,dt=\int_0^8 \left(120\cdot e^{-0'3t}+8\right)dt=\left[8t-400\cdot e^{-0'3\cdot t}\right]_0^8\approx 427'7128$

*La concentración acumulada durante las primeras 8 horas es de 427'7128 partículas*hora/m³ (aproximadamente).*

4.b) *Este valor representa la exposición total al virus que tendría una persona o un objeto dentro del barco durante ese periodo de tiempo.*

A diferencia de la concentración instantánea (que te dice cuántos virus hay en un momento exacto), la concentración acumulada suma la presencia del virus a lo largo de todo el intervalo. En términos prácticos, sirve para evaluar el riesgo biológico total y determinar si los sistemas de desinfección o ventilación están siendo efectivos para reducir la carga viral total en el ambiente.

5.a) $C'(x)=0\Leftrightarrow 2x-14=0\Leftrightarrow x=7$ y $C''(7)=2>0$; además la función ***C(x)*** es una parábola con las ramas hacia arriba (función convexa), por lo que el mínimo absoluto se alcanza en ***x=7***.

Debe tener una potencia de 7 kW.

5.b) *El coste mínimo sería de 11 unidades monetarias* ($C(7)=11$).

6.a) Llamemos ***Y={número de personas fallecidas}*** ; la variable aleatoria ***Y*** sigue una distribución binomial $Y \sim B(80, 0'38)$; por lo que el número esperado de fallecimientos es $80 \cdot 0'38 = 30'4 \approx 30$.

Se esperan 30 personas fallecidas.