

Solución a “Números perfectos”

Enunciado:

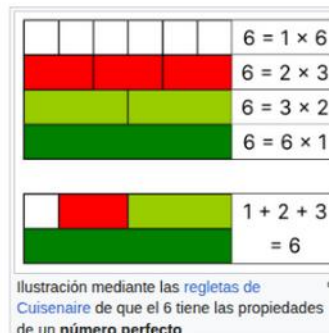
Un **número perfecto** es un número **entero positivo** que es igual a la suma de sus **divisores propios positivos** excluyéndose a sí mismo. Dicho de otra forma, un número perfecto es aquel que es **amigo** de sí mismo.

Así, 6 es un número perfecto porque sus divisores propios positivos son 1, 2 y 3; y $6 = 1 + 2 + 3$. Un divisor propio positivo de un número es un factor positivo de ese número que no sea el propio número. Por ejemplo, los divisores propios de 6 son 1, 2 y 3, pero no 6. Los siguientes números perfectos son 28, 496 y 8128.

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$



LOS NÚMEROS PERFECTOS

$$6 = (2^2 - 1) \cdot 2$$
$$28 = (2^3 - 1) \cdot 2^2$$
$$496 = (2^5 - 1) \cdot 2^4$$
$$8.128 = (2^7 - 1) \cdot 2^6$$


Y siempre que $2^n - 1$ sea primo, se tendrá que $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ será perfecto.

Demostrar que siempre que $2^n - 1$ sea primo entonces $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ es un número perfecto.

Solución:

Llamemos:

n entero positivo ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$)

$p = 2^n - 1$ es un número primo por hipótesis (claramente es mayor que 2; $p \in \{3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, \dots\}$).

Al conjunto formado por todos los primos p construidos de esa forma se les llama *primos de Mersenne*.

Por otra parte: 2^{n-1} solo tiene como divisores al conjunto siguiente: $\{1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}\}$.

Luego el conjunto de todos los divisores del producto $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1} = p \cdot 2^{n-1}$ es el siguiente:

$$\{1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, p, 2p, 4p, 8p, \dots, p \cdot 2^{n-2}, p \cdot 2^{n-1}\}$$

Y los divisores propios serían: $\{1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, p, 2p, 4p, 8p, \dots, p \cdot 2^{n-2}\}$

Hemos de demostrar que la suma de todos esos divisores propios es precisamente el número $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1} = p \cdot 2^{n-1}$ (1); veámoslo:

La suma la haremos en dos partes: sumamos entre sí las potencias solo de dos y después los productos en donde aparece el primo p .

Suma de las potencias solo de dos (progresión geométrica de razón 2):

$$S_1 = \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 = p \text{ (viene de } S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}\text{)}$$

Suma de los productos donde aparece el primo p :

$$\begin{aligned} S_2 &= p + 2p + 4p + 8p + \dots + p \cdot 2^{n-2} = p \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2}) = p \cdot \frac{2^{n-2} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = \\ &= p \cdot (2^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

Por lo que la suma total de los divisores propios será:

$$S = S_1 + S_2 = p + p \cdot (2^{n-1} - 1) = p \cdot 2^{n-1} \text{ (1) c.p.d}$$

Hemos demostrado que efectivamente el número que nos daban $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ es un número perfecto siempre que sea primo el número $2^n - 1$.