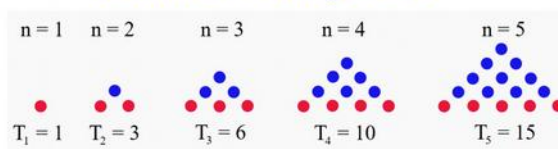


Solución a “Números triangulares y números de Pell”

Enunciado:

Números Triangulares



Números de Pell

Números de Pell [+div+]

Los números de Pell están definidos por la relación de recurrencia

$$P_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0; \\ 1 & \text{si } n = 1; \\ 2P_{n-1} + P_{n-2} & \text{otros casos.} \end{cases}$$

En palabras, la secuencia de números de Pell comienza con 0 y 1, y luego cada número de Pell se obtiene de los dos anteriores: es la suma de dos veces el número de Pell anterior y del número de Pell previo a este. Los primeros términos de la secuencia son:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, ...



Obtención gráfica de la sucesión de números de Pell: partiendo de un rectángulo formado por dos cuadrados de 1x1, en cada nuevo paso se van adosando dos cuadrados iguales, cuyo lado coincide con el lado más largo del rectángulo resultante del paso anterior. En la imagen, figura la construcción de los 4 primeros números de Pell: 1, 2, 5 y 12.

Contesta a las siguientes cuestiones razonando las respuestas:

- Encuentra el término general de la sucesión formada por los números triangulares: $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots\}$
- Averigua si el 2026 es un número triangular.
- Considerando que estamos en el 2026, halla cuantos años han de pasar para que el año en cuestión sea triangular.
- ¿Cuál es el año triangular que sigue al año 2145?
- El término general de la sucesión formada por los números de Pell se corresponde con la fórmula siguiente: $P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}$, siendo $n \geq 1$. Comprueba que se cumple para los siete primeros números de Pell (dados por recurrencia; ver gráfico anterior).
- Averigua si 2026 es un número de Pell.
- Halla el menor número de Pell mayor o igual que 2026.

Solución:

- La sucesión de números triangulares es: $T_n = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots\}$, que se corresponde con una progresión aritmética de segundo orden (las diferencias entre

cada dos términos consecutivos conforman una progresión aritmética). Su término general es un polinomio de segundo grado: $T_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$; ($n \in \mathbb{N}$). Por tanto:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=2 \\ 5a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \wedge b = \frac{1}{2} \text{ y se deduce que } c=0.$$

Así pues, el término general de la sucesión de los números triangulares es:

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n = \frac{n^2 + n}{2}; (n \in \mathbb{N})$$

b) Para que 2026 sea un número triangular debe existir un número natural n tal que:

$2026 = \frac{n^2 + n}{2} \Rightarrow n^2 + n - 4052 = 0$ y dicha ecuación de segundo grado no tiene soluciones enteras positivas (n). Por lo que:

2026 no es un número triangular

c) Ha de ocurrir que $T_n = \frac{n^2 + n}{2} \geq 2026 \Rightarrow n^2 + n - 4052 \geq 0 \Rightarrow n \geq 64$ (al ser n un número natural). Y $T_{64} = \frac{64^2 + 64}{2} = 2080$; el número triangular menor mayor o igual que 2026 es el 2080, por lo que $2080 - 2026 = 54$.

Han de pasar 54 años a partir del 2026 (es decir, el 2080)

d) $T_n = \frac{n^2 + n}{2} \geq 2145 \Rightarrow n^2 + n - 4290 \geq 0 \Rightarrow n \geq 65$; el 2145 es un número triangular (T_{65}) y el siguiente es $T_{66} = \frac{66^2 + 66}{2} = 2211$

El año correspondiente al número triangular que sigue al 2145 es el 2211.

e) La sucesión de los números de Pell se define por recurrencia así:

$$P_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{si } n=1 \\ 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2} & \text{resto de casos} \end{cases}$$

Los siete primeros números de dicha sucesión serían: $\{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70\}$

Según se dice el término general de la misma es $P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{2}}$ siempre que $n \geq 1$ (natural). Comprobemos esos siete términos:

$$P_1 = \frac{(1+\sqrt{2})^0 - (1-\sqrt{2})^0}{2 \cdot \sqrt{2}} = 0; P_2 = \frac{(1+\sqrt{2})^1 - (1-\sqrt{2})^1}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1; P_3 = \frac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{2}} = 2$$

$$P_4 = \frac{(1+\sqrt{2})^3 - (1-\sqrt{2})^3}{2 \cdot \sqrt{2}} = 5; P_5 = \frac{(1+\sqrt{2})^4 - (1-\sqrt{2})^4}{2 \cdot \sqrt{2}} = 12; P_6 = \frac{(1+\sqrt{2})^5 - (1-\sqrt{2})^5}{2 \cdot \sqrt{2}} = 29$$

$$\text{y } P_7 = \frac{(1+\sqrt{2})^6 - (1-\sqrt{2})^6}{2 \cdot \sqrt{2}} = 70 \text{ **Comprobado**}$$

f) Para que lo sea ha de existir un natural n mayor o igual que uno tal que:

$$2026 = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1} = 4052 \cdot \sqrt{2} \approx 5730,3933$$

Si en la expresión anterior sustituimos la n por naturales obtenemos:

n	$(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}$
1	2,8284
2	5,6569
3	14,1421
4	33,9411
5	82,0244
6	197,9899
7	478,0042
8	1153,9983
9	2786,0007
10	6725,9997
11	16238,0001

Y vemos que ese valor de 5730,3933 no se obtiene (para $n=9$ es menor y para $n=10$ lo supera).

Por otra parte, usando la ley de recurrencia, vemos que la sucesión de números de Pell no contiene a 2026: $\{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, \dots\}$ (es una sucesión monótona creciente).

2026 no es un número de Pell.

g) Según vemos en el apartado anterior:

El menor número de Pell mayor o igual que 2026 es 2378.