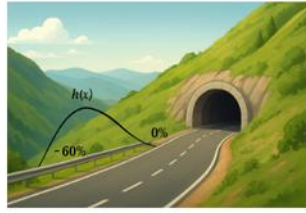


Solución a “Rampa y túnel”

Enunciado:



Una empresa de ingeniería vial está diseñando una **rampa de acceso a un túnel** en una autovía de montaña. La rampa debe cumplir las normativas de seguridad: la pendiente no debe superar el 7.2%, y los vehículos deben poder **detenerse completamente sin salirse del carril de emergencia** en caso de fallo de frenos.

Para estudiar el caso, se modeliza la **altura (en metros)** de la carretera respecto al punto más bajo mediante la función: $h(x)=0.000001x^3-0.000005x^2+5$, donde x representa la distancia horizontal recorrida en metros desde el inicio de la rampa ($x \in [0, 155]$).

Además, el comportamiento de un coche en frenada se aproxima mediante la función de velocidad instantánea (en m/s): $v(t)=25 \cdot e^{-0.25t}-2$, donde t es el tiempo en segundos desde el inicio de la frenada.

Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

- Calcula el porcentaje de pendiente máxima de la rampa, indicando en qué punto se alcanza. Comprueba si dicha pendiente máxima cumple la normativa de seguridad de no superar el 7.2%.
- Determina la distancia total recorrida por el coche hasta detenerse completamente.
- Si el coche inicia la frenada al comienzo de la rampa y se detiene en un punto de la misma, calcula a qué altura respecto al punto más bajo se detendrá.
- Determina el tiempo necesario para reducir la velocidad a la mitad y la distancia recorrida hasta ese momento.

Solución:

a) La pendiente de la rampa se calcula hallando la derivada primera de la función $h(x)$ (derivada de la altura). $h'(x)=0.000003 \cdot x^2-0.00001 \cdot x$; $x \in [0, 155]$

Hay que ver para qué x , $h'(x)$ es máxima. Es decir, calculamos el máximo absoluto de la función $h'(x)$ en el intervalo $[0, 155]$.

Calculamos, la derivada de $h'(x)$, $h''(x)$, y estudiamos el signo de h'' :

$$h''(x)=0.000006 \cdot x-0.000001$$

$$0=h''(x)=0.000006 \cdot x-0.000001 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$$

Comprobamos el signo de h'' en los intervalos $(0, 1/6)$ y en $(1/6, 155)$...

Si $x \in (0, 1/6)$ entonces $h''(x) < 0$ y la función h' es estrictamente decreciente.

Si $x \in (1/6, 155)$ entonces $h''(x) > 0$ y la función h' es estrictamente creciente.

Como: $h'(0)=0$, $h'(1/6)=-1/12000000$ y $h'(155)=899/12500$, concluimos que el punto de máxima pendiente se alcanza para $x=155$ y vale $h'(155)=0.07192$ que, en forma de porcentaje es el:

7.19% (aprox.)

La normativa exige no superar el 7.2% por lo que dicha pendiente no supera en ningún momento el 7.2% y cumple dicha normativa de seguridad.

b) El coche se detiene completamente cuando su velocidad es de 0 m/s ; luego:

$$0 = v(t) = 25 \cdot e^{-0.25t} - 2 \Leftrightarrow e^{-0.25t} = \frac{2}{25} \Leftrightarrow -0.25t = \ln\left(\frac{2}{25}\right) \Leftrightarrow t = -4 \cdot \ln\left(\frac{2}{25}\right) = 4 \cdot \ln\left(\frac{25}{2}\right) = \ln\left(\frac{390625}{16}\right) \Leftrightarrow t \approx 10.10$$

segundos.

$$\text{Llamemos } T = \ln\left(\frac{390625}{16}\right) = 4 \cdot \ln\left(\frac{25}{2}\right)$$

La distancia recorrida hasta detenerse es la integral de la velocidad instantánea en el intervalo $[0, T]$, es decir:

$$s = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T (25 \cdot e^{-0.25t} - 2) dt = (-100 \cdot e^{-0.25t} - 2t) \Big|_0^T = -100 \cdot e^{-0.25T} - 2T + 100$$

Pero $T = 4 \cdot \ln\left(\frac{25}{2}\right)$; entonces: $e^{-0.25T} = \frac{2}{25}$ y $2T = 8 \cdot \ln\left(\frac{25}{2}\right)$, con lo que:

$$s = -100 \cdot \frac{2}{25} - 8 \cdot \ln\left(\frac{25}{2}\right) + 100 = 92 - 8 \cdot \ln\left(\frac{25}{2}\right) \approx 71.79$$

La distancia recorrida hasta detenerse completamente es de 71.79 metros (aprox.)

c) Al iniciar la frenada el coche al inicio de la rampa y detenerse completamente recorre 71.79 metros (aprox.) por tanto la altura en metros será de:

$$h\left(92 - 8 \cdot \ln\left(\frac{25}{2}\right)\right) \approx h(71.79) = 0.000001 \cdot 71.79^3 - 0.0000005 \cdot 71.79^2 + 5 \approx 5.37$$

El coche se detiene a una altura de aproximadamente 5.37 metros respecto del punto más bajo.

d) La velocidad inicial es de $v(0)=23$ m/s ; por tanto el tiempo necesario para que su velocidad sea la mitad es de:

$$\frac{23}{2} = 25 \cdot e^{-0.25t} - 2 \Leftrightarrow e^{-0.25t} = \frac{27}{50} \Leftrightarrow -0.25t = \ln\left(\frac{27}{50}\right) \Leftrightarrow t = -4 \ln\left(\frac{27}{50}\right) = 4 \cdot \ln\left(\frac{50}{27}\right) \approx 2.46$$

Tiempo necesario: 2.46 segundos (aprox.)

Llamemos $z = 4 \cdot \ln\left(\frac{50}{27}\right)$

La distancia recorrida hasta ese momento será:

$$s \approx \int_0^z v(t) dt = \int_0^z (25 \cdot e^{-0.25t} - 2) dt = (-100 \cdot e^{-0.25t} - 2t) \Big|_0^z = -100 \cdot e^{-0.25 \cdot z} - 2 \cdot z + 100$$

Sustituyendo ahora $z = 4 \cdot \ln\left(\frac{50}{27}\right)$ y operando quedaría que:

La distancia recorrida hasta ese momento: 41.07 metros (aprox.)

Nota importante (apartados b, c y d): La distancia obtenida mediante $\int v(t)dt$ corresponde estrictamente a la longitud recorrida sobre la rampa. Dado que la pendiente es pequeña (máx. $\approx 7.2\%$), se aproxima con buena precisión a la distancia horizontal empleada en $h(x)$.