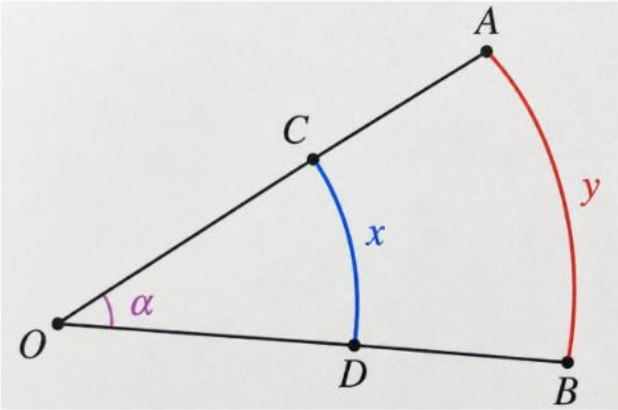
Solución a "Sectores circulares"

Enunciado:



En la foto se observan dos sectores circulares concéntricos, **OCD y OAB**, que tienen el mismo ángulo central **α** (radianes). Se sabe que el arco menor, **CD**, mide **x** metros y el arco mayor **AB** mide **y** metros.

a) Demuestra que el cociente de las áreas de ambos sectores circulares cumple: $\frac{A_{OCD}}{A_{OAB}}=\frac{x^2}{y^2}$.

b) Como aplicación, calcula el cociente entre las áreas de ambos sectores, $\frac{A_{OCD}}{A_{OAB}}$, si $A_{OCD}=80\,cm^2$ y $A_{CABD}=0'01\,m^2$.

c) Con los datos del apartado **b**, averigua qué porcentaje representa el área del sector circular, A_{OCD}, con respecto del área del sector circular A_{OAB}.

d) Con los datos del apartado **b** y sabiendo que el ángulo $\alpha=\frac{\pi}{6}$, calcula la longitud de los perímetros de los sectores circulares **OCD** y **OAB**, respectivamente.

e) El cociente entre ambos perímetros de los sectores circulares ¿cumple, al igual que las áreas, que es igual a $\frac{x^2}{y^2}$ (según el apartado **a**)? Razona la respuesta.

Solución:

a) Sabemos que si ***r*** es el radio de un sector circular y ***α*** es su ángulo en radianes:

Longitud del arco: $L=r\cdot\alpha$

Área del sector circular: $A=\frac{1}{2}\cdot L\cdot r=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot r^2$

En nuestro caso:

$x=OC\cdot\alpha$ y $y=(OC+CA)\cdot\alpha=x+CA\cdot\alpha$

$A_{OCD}=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot OC^2=\frac{1}{2}\cdot x\cdot OC$ y $A_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot OA^2=\frac{1}{2}\cdot y\cdot OA$

Pero:

$$\frac{A_{OCD}}{A_{OAB}}=\frac{OC^2}{OA^2}=\left(\frac{2\,A_{OCD}}{x}\right)^2\div\left(\frac{2\,A_{OAB}}{y}\right)^2=\frac{y^2\cdot A_{OCD}^2}{x^2\cdot A_{OAB}^2}$$

Por lo que: $A_{OCD}\cdot x^2\cdot A_{OAB}^2=A_{OAB}\cdot y^2\cdot A_{OCD}^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2}=\frac{A_{OAB}\cdot A_{OCD}^2}{A_{OCD}\cdot A_{OAB}^2}=\frac{A_{OCD}}{A_{OAB}}$

Así pues queda demostrado que: $\frac{A_{OCD}}{A_{OAB}}=\frac{x^2}{y^2}$

b) Aquí tenemos que: $A_{OCD}=80\,cm^2$ y el área $A_{CABD}=0\,'\,01\,m^2=100\,cm^2$, por lo que el área del sector ***OAB*** es: $A_{OAB}=A_{OCD}+A_{CABD}=180\,cm^2$

Por tanto: $\frac{A_{OCD}}{A_{OAB}}=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$

4/9 es la razón entre esas áreas, es decir nueve veces el área del sector circular OCD se corresponden o equivalen a cuatro veces el área del sector circular OAB.

c) Por el apartado anterior: $9\cdot A_{OCD}=4\cdot A_{OAB}\Leftrightarrow A_{OCD}=\frac{4}{9}\cdot A_{OAB}\approx 0\,'\,4444\cdot A_{OAB}$

Representa un 44´44% (aproximadamente)

d) Tenemos que: $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $A_{OCD}=80\,cm^2$ y $A_{OAB}=180\,cm^2$.

Como $A=\frac{1}{2}\cdot L\cdot r=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot r^2$: $A_{OCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot OC^2=80\Leftrightarrow OC^2=\frac{960}{\pi}\Rightarrow OC=\sqrt{\frac{960}{\pi}}$ (radio del sector circular ***OCD***). Además: $A_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot OA^2=180\Leftrightarrow OA^2=\frac{2160}{\pi}\Rightarrow OA=\sqrt{\frac{2160}{\pi}}$ (radio del sector circular ***OAB***).

Los arcos correspondientes serán ($L=\frac{2\,A}{r}$):

$$x=160\div\sqrt{\frac{960}{\pi}}=\frac{4\cdot\sqrt{15\,\pi}}{3}\ cm$$

$$y=360\div\sqrt{\frac{2160}{\pi}}=2\cdot\sqrt{15\,\pi}\ cm$$

El perímetro de OCD es:

$$P_{OCD}=x+2\cdot OC=\frac{4\cdot\sqrt{15\pi}}{3}+2\cdot\sqrt{\frac{960}{\pi}}=\frac{4\cdot\sqrt{15\pi}}{3}+\frac{16\cdot\sqrt{15\pi}}{\pi}=\frac{(4\pi+48)\cdot\sqrt{15\pi}}{3\pi}\approx 44'1145\ cm$$

El perímetro de OAB es:

$$P_{OAB}=y+2\cdot OA=2\cdot\sqrt{15\pi}+2\cdot\sqrt{\frac{2160}{\pi}}=2\cdot\sqrt{15\pi}+\frac{24\cdot\sqrt{15\pi}}{\pi}=\frac{(2\pi+24)\cdot\sqrt{15\pi}}{\pi}\approx 66'1717\ cm$$

e) Si dividimos ambos perímetros *(por ejemplo, del apartado anterior)* nos da:

$$\frac{P_{OCD}}{P_{OAB}}=\frac{(4\pi+48)\cdot\sqrt{15\pi}}{3\pi}\div\frac{(2\pi+24)\cdot\sqrt{15\pi}}{\pi}=\frac{2}{3}$$

Mientras que $\frac{x^2}{y^2}=\frac{16\cdot 15\pi}{9}\div(4\cdot 15\pi)=\frac{4}{9}$

No se cumple que sean iguales (el cociente de los perímetros de los sectores circulares no coincide con el cuadrado del cociente entre los arcos de dichos sectores).