

Solución a “Yo solo simplifiqué”

Enunciado:



Solución:

Llamemos $a = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; por supuesto que $a \in \mathbb{R}$.

Elevando al cubo:

$$a^3 = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3 = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3 + 3 \cdot (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^2 \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 3 \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^2 + (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3$$

(cubo del binomio suma)

Desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned} a^3 &= 2 + \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2 \cdot (2-\sqrt{5})} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2+\sqrt{5}) \cdot (2-\sqrt{5})^2} + 2 - \sqrt{5} = \\ &= 4 + 3 \cdot \sqrt[3]{-2-\sqrt{5}} + 3 \cdot \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} = 4 - 3 \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + 3 \cdot \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} = 4 - 3 \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \\ &= 4 - 3 \cdot (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}) = 4 - 3 \cdot a \end{aligned}$$

O sea, hemos obtenido la ecuación: $a^3 = 4 - 3 \cdot a \Leftrightarrow a^3 + 3a - 4 = 0$ cuya solución real es $a = 1$ (las otras dos son complejas).

El resultado es 1, sin usar la calculadora ni IA ni ná.