

Solución a “Averigua las raíces de este polinomio y factorízalo”

Enunciado:

¿Qué raíces tiene el polinomio
 $p(x) = 2m(1 + x^2) - (1 + m^2)(x + m)$?

Solución:

Si $m=0$, nuestro polinomio queda $p(x)=-x$ y su única raíz es $x=0$. Factorizado quedaría $p(x)=-1 \cdot (x-0)$

Por tanto, supongamos que $m \neq 0$ a partir de ahora:

Desarrollemos dicho polinomio (m es un parámetro y la variable es x):

$$\begin{aligned} p(x) &= 2m \cdot (1+x^2) - (1+m^2) \cdot (x+m) = 2m + 2mx^2 - (x+m+m^2x+m^3) = \\ &= 2m + 2mx^2 - x - m - m^2x - m^3 = \\ &= 2mx^2 + (-1-m^2)x + m - m^3 \end{aligned}$$

que es un polinomio de segundo grado con coeficientes $a=2m$; $b=-1-m^2$; $c=m-m^3$

Las raíces son las soluciones de $p(x)=0$; es decir:

$$= 2mx^2 + (-1-m^2)x + m - m^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(1+m^2) \pm \sqrt{(-1-m^2)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (m-m^3)}}{4m}$$

Desarrollemos el discriminante:

$$(-1-m^2)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (m-m^3) = 1 + 2m^2 + m^4 - 8m^2 + 8m^4 = 9m^4 - 6m^2 + 1 = (3m^2 - 1)^2$$

La raíz cuadrada quedaría: $\sqrt{(3m^2 - 1)^2} = |3m^2 - 1|$

Así pues las raíces son:

$$x = \frac{(1+m^2) \pm |3m^2 - 1|}{4m}$$

Estudiemos el signo de $3m^2 - 1$:

Caso 1 ($3m^2 - 1 \geq 0$)

$$3m^2 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{Y por tanto: } x = \frac{(1+m^2) \pm |3m^2-1|}{4m} = \frac{(1+m^2) \pm (3m^2-1)}{4m}$$

O sea:

$$x_1 = \frac{(1+m^2) + (3m^2-1)}{4m} = \frac{4m^2}{4m} = m$$

y

$$x_2 = \frac{(1+m^2) - (3m^2-1)}{4m} = \frac{2-2m^2}{4m} = \frac{1-m^2}{2m}$$

Caso 2 ($3m^2 - 1 < 0$)

$$3m^2 < 1 \Leftrightarrow m^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{Y por tanto: } x = \frac{(1+m^2) \pm |3m^2-1|}{4m} = \frac{(1+m^2) \pm (1-3m^2)}{4m}$$

O sea:

$$x_3 = \frac{(1+m^2) + (1-3m^2)}{4m} = \frac{2-2m^2}{4m} = \frac{1-m^2}{2m}$$

y

$$x_4 = \frac{(1+m^2) - (1-3m^2)}{4m} = \frac{4m^2}{4m} = m$$

Así pues, si m es distinto de cero las raíces de $p(x)$ son m y $\frac{1-m^2}{2m}$; por lo que en este

caso la factorización sería:

$$p(x) = 2m \cdot (x - m) \cdot \left(x - \frac{1-m^2}{2m}\right)$$