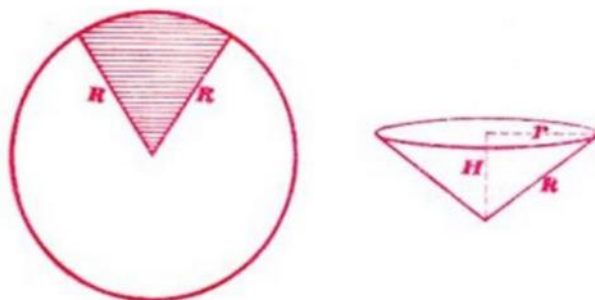


Solución a “El embudo de la mayor capacidad”

Enunciado:



Debemos construir la parte cónica de un embudo valiéndonos de un círculo de hojalata. Para ello se corta un sector circular en dicho círculo y, con el resto, se construye el cono (ver las figuras). Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuántos grados, minutos y segundos debe tener el arco del sector circular que se ha cortado para que el embudo alcance la mayor capacidad posible?
- b) Averigua cuál es el valor de dicha capacidad máxima en función del radio R del círculo de hojalata.
- c) Si el área del círculo de hojalata inicial es de $25\pi \text{ cm}^2$, ¿cuál sería el volumen máximo de dicho embudo así construido?
- d) Para el cono de volumen máximo, determina el radio de la base y su altura en función de R .
- e) ¿Qué valor del arco cortado (en grados, minutos y segundos) hace que la altura del cono sea precisamente el doble del radio de la base, es decir $H=2r$?

Solución:

a) La longitud de la circunferencia del círculo de hojalata es: $2 \cdot \pi \cdot R$

La longitud de la circunferencia del cono del embudo es: $2 \cdot \pi \cdot r$

La diferencia entre ambas longitudes es: $R \cdot \alpha = 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \pi \cdot (R - r)$, donde α es la longitud en radianes del ángulo del sector circular que se observa en el círculo de hojalata ($R \cdot \alpha$ es la longitud del arco del sector circular; diferencia entre la longitud de la circunferencia inicial del círculo de hojalata y la longitud de la circunferencia del cono formado para el embudo).

O sea: $R \cdot \alpha = 2 \pi \cdot (R - r)$

Nótese que tanto R como r son positivos y $r < R$. Esto es para todo el ejercicio.

El volumen del cono con forma de embudo es: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$; pero $H = \sqrt{R^2 - r^2}$

Así pues: $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2})$ (función a maximizar ; tomando R como un parámetro). Es una función continua y derivable.

Calculamos su derivada primera:

$$V'(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2rR^2 - 3r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)$$

que será cero sólo cuando: $2rR^2 - 3r^3 = 0 \Leftrightarrow r \cdot (2R^2 - 3r^2) = 0 \Rightarrow 3r^2 = 2R^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{3} \cdot R^2$; por tanto, cuando $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$ (al ser $r \neq 0$).

Y la derivada segunda queda:
$$V''(r) = \frac{2R^4 \cdot \pi - 9R^2 \cdot r^2 \cdot \pi + 6 \cdot r^4 \cdot \pi}{(3R^2 - 3r^2) \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}$$

Por lo que:
$$V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R\right) = \frac{-4R^2 \pi}{3 \cdot \sqrt{\frac{R^2}{3}}} < 0$$

Así pues, el volumen del embudo es máximo para $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$

Veamos el máximo de una forma más sencilla (sin calcular la derivada segunda y a partir de la derivada primera):

$$V'(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2rR^2 - 3r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) \text{ (es una función continua y derivable en su dominio; nótese que}$$

no está definida para $r=R$; además $r < R$). El punto crítico (derivada se anula) es $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$.

Si $r < \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$, entonces $V'(r) > 0$ (compruébese por ejemplo con $r = 0.81R$) , por lo que la función V es creciente en $\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R\right)$.

Si $r > \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$, entonces $V'(r) < 0$ (compruébese por ejemplo con $r = 0.82R$) , por lo que la función V es decreciente en $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R, R\right)$.

Al ser V una función continua en $(0, R)$, y creciente antes de su punto crítico y decreciente después del mismo su tiene un máximo en el punto $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$.

Calculemos ahora el ángulo pedido α :

$$\text{Como } R \cdot \alpha = 2\pi \cdot (R-r) \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi \cdot (R-r)}{R} = \frac{2\pi \cdot R \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{R} = 2\pi \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

es decir, $\alpha = 2\pi \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ radianes.

Pasados a grados queda: $\alpha \approx 66.06123$ *grados sexagesimales*, que se corresponden con:

$$\alpha \approx 66^\circ 3' 40.43''$$

b) El valor de la máxima capacidad del embudo en función del radio de la circunferencia de hojalata, R , sería:

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{2}{3} \cdot R^2}\right) = \frac{2\pi \cdot R^3 \cdot \sqrt{3}}{27}$$

c) En ese caso $\pi \cdot R^2 = 25 \cdot \pi \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$

El volumen máximo del embudo, en este caso, sería:

$$V_{\max} = \frac{250 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{27} \text{ cm}^3 \approx 50.3833157 \text{ cm}^3$$

d) $\frac{2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \sqrt{3}}{27} = V_{\max}$ que se obtenía para $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$ (ya visto anteriormente)

$$\text{Y } H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{2}{3} \cdot R^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R; \text{ así pues: } H = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R$$

e) Tenemos ahora que $H = 2r$; como $R^2 = H^2 + r^2$, tenemos que $R^2 = 5r^2 \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\text{Como } R \cdot \alpha = 2\pi \cdot (R-r), \text{ tenemos: } \alpha = 2\pi \cdot \frac{R-r}{R} = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 2\pi \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5}$$

Y nos sale $\alpha \approx 3.473259$ *radianes* = $199^\circ 0' 11.18''$