

Solución a “f nunca toma valores positivos”

Enunciado:

Demostrar que la función
 $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
definida por: $f(x) = x - 1 - x\sqrt{x}$
nunca toma valores positivos

Solución:

El dominio D de la función f es $D = [0, +\infty)$; dicha función es continua en su dominio y derivable en el intervalo $(0, +\infty)$.

Además $f(0) = -1 < 0$

Su función derivada es:

$$f'(x) = 1 - \left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 1 - \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = 1 - \frac{3\sqrt{x}}{2} \text{ (también es continua en el intervalo } (0, +\infty) \text{).}$$

$$\text{Pero: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

$$\text{Y } f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{-23}{27} < 0$$

Para $0 < x < \frac{4}{9}$ se tiene que $f'(x) > 0$, por lo que f es *estrictamente creciente* en dicho intervalo $(0, 4/9)$.

Para $x > \frac{4}{9}$ se tiene que $f'(x) < 0$, por lo que f es *estrictamente decreciente* en dicho intervalo $(4/9, +\infty)$.

Así pues, la función f **presenta un máximo absoluto en el punto $P(4/9, -23/27)$** . Ten en cuenta que $-23/27 > -1 = f(0)$.

Por tanto, siempre toma valores negativos y nunca toma valores positivos. c.q.d

