

Solución a "Tiempo para estudiar temas"

Enunciado:



Cuando una persona empieza a estudiar por primera vez un tema, quizás no sea muy hábil, pero con el tiempo se aproximará a los límites de su habilidad. Sea T el tiempo necesario (en días) para que una persona aprenda una cantidad L de temas. Se sabe que la razón del cambio del tiempo respecto a la cantidad de temas es: $\frac{dT}{dL} = a \cdot \sqrt{L+b} + \frac{aL}{2\sqrt{L+b}}$, donde a y b son constantes positivas.

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si para aprender tres temas se necesita un tiempo de $3a \cdot \sqrt{3+b} + 1$ días:

a1) ¿Cuántos días se necesitan para aprender ocho temas si $a=1/2$ y $b=1$?

a2) Suponiendo los valores a y b del apartado anterior (a1), calcula el valor promedio del tiempo total acumulado $T(L)$ cuando la cantidad de temas L varía desde 3 hasta 8.

b) Tomemos $a=b=1$:

b1) ¿Cuántos temas completos puede aprender una persona si dispone como máximo de $5a \cdot \sqrt{3+b}$ días?

b2) Encuentra L (temas completos) tal que el tiempo para aprender L sea el doble de tiempo que para aprender dos temas.

Solución:

Obtenemos primeramente la expresión de $T(L)$ a partir de la derivada dada en el enunciado.

$$\frac{dT}{dL} = a \cdot \sqrt{L+b} + \frac{a \cdot L}{2 \cdot \sqrt{L+b}}, \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ ambos positivos.}$$

$$T(L) = \int \left(a \cdot \sqrt{L+b} + \frac{a \cdot L}{2 \cdot \sqrt{L+b}} \right) dL$$

$$\text{Pero } \frac{dT}{dL} ((a \cdot L) \cdot (\sqrt{L+b})) = a \cdot \sqrt{L+b} + \frac{a \cdot L}{2 \cdot \sqrt{L+b}} \text{ (derivada de un producto de funciones)}$$

$$T(L) = \int \left(a \cdot \sqrt{L+b} + \frac{a \cdot L}{2 \cdot \sqrt{L+b}} \right) dL = a \cdot L \cdot \sqrt{L+b} + K$$

Como $3 \cdot a \cdot \sqrt{3+b} + 1 = T(3) = 3 \cdot a \cdot \sqrt{3+b} + K$, resulta que $K=1$ (constante de integración)

Así pues la función tiempo en días según el número de temas estudiados es:

$$T(L) = a \cdot L \cdot \sqrt{L+b} + 1$$

a1) Tenemos que $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$

$$T(8) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{8+1} + 1 = 13 \text{ días}$$

a2) Calculemos el promedio.

$$T(L) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \sqrt{L+1} + 1$$

El valor promedio pedido sería: $\frac{1}{8-3} \cdot \int_3^8 T(L) dL = \frac{1}{5} \cdot \int_3^8 \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot \sqrt{L+1} + 1 \right) dL$

Calculemos la integral $\int \frac{1}{2} \cdot L \cdot \sqrt{L+1} dL$

Hacemos el cambio $u = L+1$, por lo que $L = u-1$ y $dL = du$.

$$\int \frac{1}{2} \cdot (u-1) \cdot \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \int (u-1) \cdot u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{u^{5/2}}{5} - \frac{u^{3/2}}{3}$$

Por lo que $\int \frac{1}{2} \cdot L \cdot \sqrt{L+1} dL = \frac{(L+1)^{5/2}}{5} - \frac{(L+1)^{3/2}}{3}$

$$\text{Y } \int \frac{1}{2} \cdot L \cdot \sqrt{L+1} + 1 dL = \frac{(L+1)^{5/2}}{5} - \frac{(L+1)^{3/2}}{3} + L$$

Con lo que: $\int_3^8 \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot \sqrt{L+1} + 1 \right) dL = \frac{9^{5/2}}{5} - \frac{9^{3/2}}{3} + 8 - \left(\frac{4^{5/2}}{5} - \frac{4^{3/2}}{3} + 3 \right) = \frac{613}{15}$

Finalmente: $\frac{1}{8-3} \cdot \int_3^8 T(L) dL = \frac{1}{5} \cdot \frac{613}{15} = \frac{613}{75} \approx 8,1733$ (valor promedio del tiempo total acumulado desde 3 a 8 temas)

b) Tenemos ahora $a = b = 1$

b1) Ahora $T(L) = L \cdot \sqrt{L+1} + 1$

Dispone como máximo de $5 a \sqrt{3+b} = 5 \cdot 2 = 10$ días.

Por lo que $T(L) \leq 10 \Leftrightarrow L \cdot \sqrt{L+1} + 1 \leq 10 \Leftrightarrow L \cdot \sqrt{L+1} \leq 9$

Si probamos con valores para L tenemos:

$L = 4$; $4 \cdot \sqrt{5} \leq 9$; pero $L = 5$; $5 \cdot \sqrt{6} > 9$

Así pues, se pueden aprender 4 temas en esos 10 días.

b2) Tiempo (días) para aprender L temas: $T(L) = L \cdot \sqrt{L+1} + 1$

Tiempo para aprender 2 temas: $T(2) = 2\sqrt{3} + 1$ (días)

$$T(L) = L \cdot \sqrt{L+1} + 1 = 4\sqrt{3} + 2 \Leftrightarrow L \cdot \sqrt{L+1} = 4\sqrt{3} + 1$$

Y tenemos la ecuación en L :

$L \cdot \sqrt{L+1} - (4\sqrt{3} + 1) = 0$, cuya solución aproximada numérica es 3,6691 (no entera). Véase por aproximación.

Por tanto, la solución real es 3,6691 (aprox.), pero no existe una solución entera. Es decir, no hay un número entero de temas cuyo tiempo de estudio sea exactamente el doble del necesario para aprender 2 temas.