

Las Fiestas del Pilar: matemáticas para organizar el 12 de octubre



Con motivo de las Fiestas del Pilar, que se celebran en Zaragoza en torno al 12 de octubre, el Ayuntamiento está preparando distintas actividades para vecinos y visitantes. El equipo organizador necesita estudiar la afluencia de público, diseñar algunos espacios y planificar el espectáculo de la noche. A continuación, se proponen varias situaciones que deberán resolverse utilizando los conocimientos matemáticos adquiridos durante el curso.

1) Afluencia de visitantes

Durante las primeras horas de la jornada, el número de visitantes que llegan cada hora a una zona del recinto se aproxima mediante la función $f(t) = -2t^3 + 18t^2 + 48t + 120$, donde t es el tiempo transcurrido desde las 10 horas, medido en horas, y $f(t)$ representa el número de visitantes por hora en centenas. Se considera que el modelo es válido para $0 \leq t \leq 4$.

- 1a) Estudia la monotonía de la función e indica a qué hora se produce la máxima tasa de llegada de visitantes.
- 1b) Calcula la tasa máxima de llegada y compárala con la correspondiente a las 12:00 horas.
- 1c) Calcula mediante una integral definida el número total de visitantes que llegan a esta zona entre las 10:00 y las 14:00 horas.

2) Diseño de una zona para la ofrenda floral

Para instalar una composición floral, se quiere delimitar un recinto rectangular utilizando 120 metros de valla. Por motivos de seguridad, uno de los lados del recinto debe medir al menos 20 metros.

- 2a) Expresa el área del recinto en función de la longitud de uno de los lados y determina las dimensiones que hacen máxima dicha área.
- 2b) Comprueba si la condición de seguridad modifica las dimensiones obtenidas en el apartado anterior.
- 2c) Si se decide que uno de los lados mida 40 metros, calcula el área del recinto y determina qué porcentaje del área máxima representa.

3) El arco luminoso

Uno de los elementos decorativos del espectáculo nocturno consiste en un arco luminoso cuya altura viene dada, aproximadamente, por la función $h(x) = -0,05 \cdot x^2 + 0,8x + 2$, donde x es la distancia horizontal, en metros, desde el origen de referencia, y $h(x)$ es la altura del arco en metros.

3a) Calcula la altura máxima del arco e indica a qué distancia horizontal se alcanza.

3b) Determina en qué puntos el arco alcanza una altura de 4 metros, si los hay.

3c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de la función, el eje horizontal y las rectas $x = 0$ y $x = 12$.

4) Control de calidad de las pulseras

Para controlar el acceso al recinto, se utilizan pulseras de tres colores. El 50 % son rojas, el 30 % amarillas y el 20 % azules. Se sabe que el 4 % de las pulseras rojas, el 6 % de las amarillas y el 3 % de las azules presentan algún defecto de fabricación. Se elige una pulsera al azar:

4a) Calcula la probabilidad de que la pulsera sea defectuosa.

4b) Si se comprueba que la pulsera es defectuosa, calcula la probabilidad de que sea amarilla.

4c) Se seleccionan 10 pulseras de forma independiente. Calcula la probabilidad de que exactamente dos sean defectuosas.

5) El espectáculo de la Noche del Pilar

La organización de un espectáculo de luces debe fijar el precio de las entradas. Según las previsiones realizadas, el beneficio obtenido por la venta de entradas, expresado en miles de euros, viene dado por la función $B(x) = -2 \cdot x^2 + 80x - 300$, donde x es el precio de cada entrada, en euros, y $5 \leq x \leq 35$.

5a) Determina el precio de la entrada que proporciona el beneficio máximo y calcula dicho beneficio.

5b) Calcula los precios para los que el beneficio es de 300.000 euros, si existen dentro del intervalo considerado.

5c) Determina para qué precios el beneficio supera los 450.000 euros.

Nota: los datos y las funciones de los cinco apartados son ficticios y se han planteado con fines didácticos.