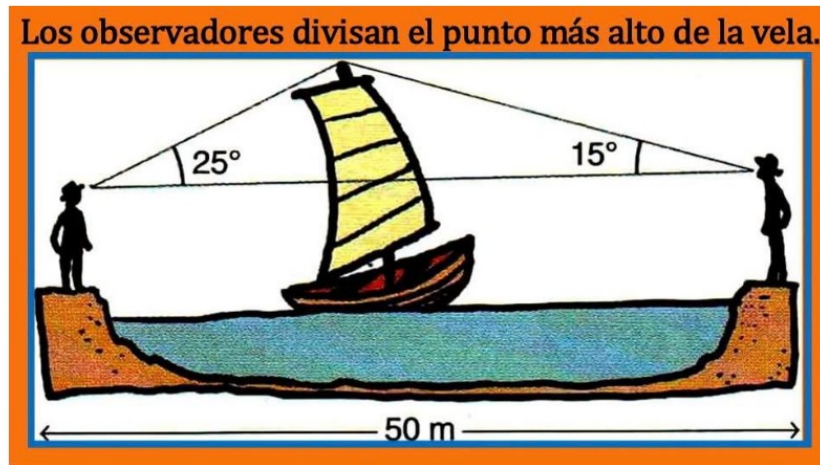


Solución a "Barca y observadores"

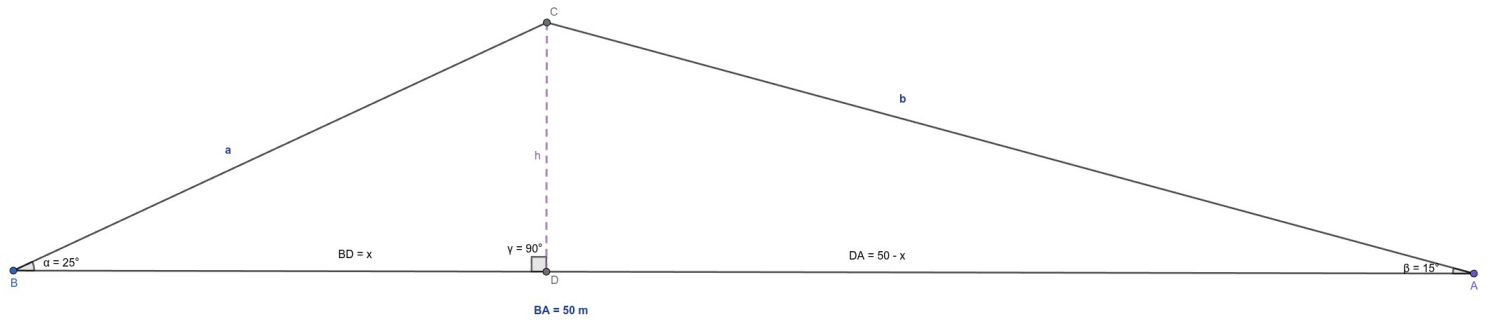
Enunciado:



- 1) ¿A qué distancia de cada orilla se encuentra la barca?
- 2) Calcula la distancia de cada observador al punto más alto del palo de la vela.
- 3) En la figura se observa un triángulo. Calcula su área sin utilizar la altura sobre el lado de 50 m. Después utiliza dicha altura y comprueba que coinciden.
- 4) Si la barca se desplazara hasta situarse exactamente en el centro del río (a 25 metros de cada observador), ¿cuáles serían los nuevos ángulos de elevación con los que divisarían el punto más alto de la vela?
- 5) Desde la posición inicial de la barca, ¿a qué distancia de la orilla tendría que situarse un observador para que el ángulo de elevación con el que observa el punto más alto del palo de la vela fuese de 45° ?

Solución:

- 1) Consideremos la situación inicial en este gráfico:



En esta primera pregunta nos piden que calculemos **BD** y **DA**, o sea, **x** y **50-x**.

Claramente:

$$\begin{cases} \tan 25^\circ = \frac{h}{x} \\ \tan 15^\circ = \frac{h}{50-x} \end{cases} ; \text{ de donde}$$

$$x \cdot \tan 25^\circ = 50 \cdot \tan 15^\circ - x \cdot \tan 15^\circ \Leftrightarrow x \cdot (\tan 15^\circ + \tan 25^\circ) = 50 \cdot \tan 15^\circ \Leftrightarrow x = \frac{50 \cdot \tan 15^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ}$$

Así pues:

$$x = \frac{50 \cdot \tan 15^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \text{ m} \approx 18'2463 \text{ m} \text{ (distancia a la orilla donde está el observador de la izquierda, B).}$$

Por tanto:

$$DA = 50 - x = 50 - \frac{50 \cdot \tan 15^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} = \frac{50 \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \text{ m} \approx 31'7537 \text{ m} \text{ (distancia a la orilla donde está el observador de la derecha, A)}$$

Y ya de paso $h = x \cdot \tan 25^\circ = \frac{50 \cdot \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \text{ m} \approx 8'5084 \text{ m}$ (altura de dicho triángulo **ΔABC** sobre el lado **AB**).

2) En esta pregunta me piden **a** y **b**. Luego:

$$\operatorname{sen} 25^{\circ} = \frac{h}{a} \Rightarrow a = \frac{h}{\operatorname{sen} 25^{\circ}} = \frac{50 \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \tan 25^{\circ}}{\operatorname{sen} 25^{\circ} \cdot (\tan 15^{\circ} + \tan 25^{\circ})} \text{ m} \approx 20'1325 \text{ m}$$

(distancia al observador **B** de la izquierda).

$$\operatorname{sen} 15^{\circ} = \frac{h}{b} \Rightarrow b = \frac{h}{\operatorname{sen} 15^{\circ}} = \frac{50 \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \tan 25^{\circ}}{\operatorname{sen} 15^{\circ} \cdot (\tan 15^{\circ} + \tan 25^{\circ})} \text{ m} \approx 32'8739 \text{ m}$$

(distancia al observador **A** de la derecha).

3) El área se puede calcular conociendo dos lados del triángulo y el ángulo que estos forman entre sí.

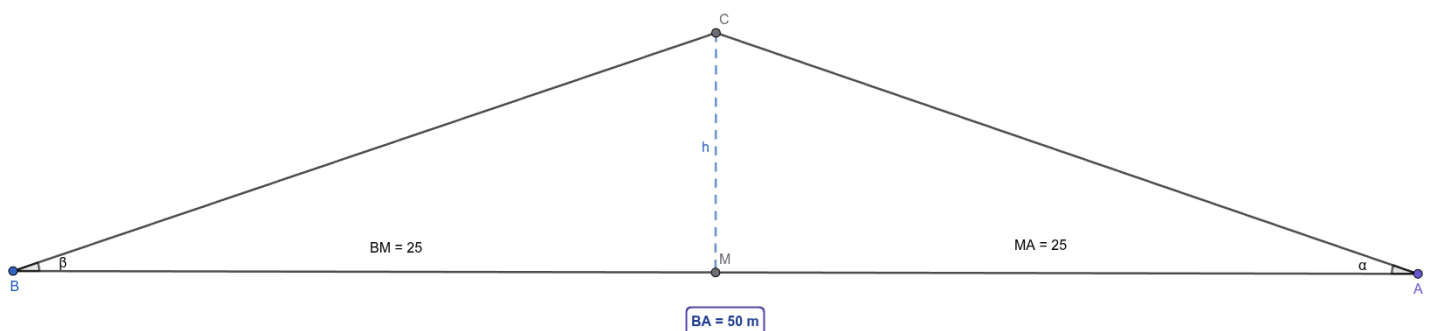
$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \tan 25^{\circ}}{\operatorname{sen} 25^{\circ} \cdot (\tan 15^{\circ} + \tan 25^{\circ})} \cdot 50 \cdot \operatorname{sen} 25^{\circ} = \\ &= \frac{1250 \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \tan 25^{\circ}}{\tan 15^{\circ} + \tan 25^{\circ}} \text{ m}^2 \approx 212'7096 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Con la fórmula tradicional de la base y la altura:

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot h \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \tan 25^{\circ}}{\tan 15^{\circ} + \tan 25^{\circ}} \cdot 50 = \\ &= \frac{1250 \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \tan 25^{\circ}}{\tan 15^{\circ} + \tan 25^{\circ}} \text{ m}^2 \approx 212'7096 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Coinciden.

4) Manteniendo la altura **h** anterior (apartado 1) tenemos:



$\triangle ABC$ es un triángulo isósceles ahora pues el vértice C está en la mediatriz del segmento **AB**.

Así pues, los ángulos alfa y beta son iguales: $\alpha = \beta$.

$$\tan \beta = \frac{h}{25} = \frac{50 \cdot \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{25 \cdot (\tan 15^\circ + \tan 25^\circ)} = \frac{2 \cdot \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \Rightarrow$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{2 \cdot \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \right) = \alpha \approx 18^\circ 47' 42,91''$$

5) Ahora al ser un ángulo de 45° y tratarse de un triángulo rectángulo resulta que es un triángulo isósceles (los dos catetos son iguales); por tanto ambos catetos miden **h** (altura sobre el lado **BA**). Como esa altura era

$$h = \frac{50 \cdot \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \text{ m} \approx 8'5084 \text{ m}$$

resulta que, desde la posición inicial de la barca, el observador tendría que estar a una distancia **h** del palo de la vela, es decir, tendríamos:

Con respecto al observador B (de la izquierda)

Distancia =

$$x - h = \frac{50 \cdot \tan 15^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} - \frac{50 \cdot \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} = \frac{50 \cdot \tan 15^\circ \cdot (1 - \tan 25^\circ)}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \text{ m}$$

Lo que es aproximadamente 9'738 m de la orilla izquierda (hacia el río).

Con respecto al observador A (de la derecha)

Distancia =

$$50 - x - h = \frac{50 \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} - \frac{50 \cdot \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} = \frac{50 \cdot \tan 25^\circ \cdot (1 - \tan 15^\circ)}{\tan 15^\circ + \tan 25^\circ} \text{ m}$$

Lo que es aproximadamente 23'245 m de la orilla derecha (hacia el río).

Indicación: ambos puntos quedan dentro del río, así que, en la práctica, cada observador tendría que situarse en otra barca o sobre el agua.