

Solución a “Probabilidad y Esperanza en la Lotería de Navidad”

Enunciado:



En el **Sorteo Extraordinario de la Lotería de Navidad** se juegan **100 000 números distintos**, desde el 00000 hasta el 99999. Cada número se divide en **décimos**, y el precio de **un décimo es de 20 €**.

Los **premios principales por décimo** son:

Premio	Importe (€)
Primer premio (El Gordo)	400 000 €
Segundo premio	125 000 €
Tercer premio	50 000 €
Reintegro	20 €

El **reintegro** consiste en recuperar el importe del décimo si la última cifra del número coincide con la del primer premio.

Supondremos que **solo se consideran estos premios** (ignoramos pedreas, aproximaciones y otros premios menores).

Una persona compra **un único décimo elegido al azar**.

Preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el décimo comprado obtenga:
 - a) El primer premio
 - b) El segundo premio
 - c) El tercer premio
- ¿Cuál es la probabilidad de que el décimo obtenga **algún premio de los considerados**?
- Define la variable aleatoria X = “premio obtenido (en euros) por un décimo”. Calcula la **esperanza matemática** de X .
- A partir del resultado anterior, calcula la **esperanza de ganancia o pérdida por euro apostado** e interprétala.
- ¿Qué cantidad media se espera recuperar si una persona compra **10 décimos distintos**? ¿Cambia esto las conclusiones anteriores?

Solución:

Nombremos los sucesos:

$P_1 = \{\text{El décimo comprado obtiene el primer premio}\}$

$P_2 = \{\text{El décimo comprado obtiene el segundo premio}\}$

$P_3 = \{\text{El décimo comprado obtiene el tercer premio}\}$

1) Veamos los apartados correspondientes:

$$a) P(P_1) = \frac{1}{100000} = 0,00001 = 0,001 \%$$

$$b) P(P_2) = \frac{1}{100000} = 0,00001 = 0,001 \%$$

$$c) P(P_3) = \frac{1}{100000} = 0,00001 = 0,001 \%$$

2) Llamemos $R = \{\text{El décimo comprado obtiene el reintegro}\}$.

$$\text{Claramente } P(R) = \frac{1}{10} = 0,1$$

Además un mismo décimo no puede tener dos o más premios, por lo que:

$$\begin{aligned} P(P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup R) &= P(P_1) + P(P_2) + P(P_3) + P(R) = \frac{3}{100000} + \frac{1}{10} = \\ &= \frac{100030}{1000000} = \frac{10003}{100000} = 0,10003 = 10,003 \% \end{aligned}$$

(al ser los sucesos incompatibles dos a dos)

Nota: prácticamente toda esa probabilidad corresponde al reintegro.

3) Llamemos $X = \{\text{premio obtenido en euros por un décimo}\}$

La esperanza matemática del premio obtenido se calcula sumando los productos de la probabilidades de obtener cada premio por el premio en cuestión. Por tanto:

$$\begin{aligned} E(X) &= 400000 \cdot P(P_1) + 125000 \cdot P(P_2) + 50000 \cdot P(P_3) + 20 \cdot P(R) = \\ &= \frac{400000 + 125000 + 50000}{100000} + \frac{20}{10} = \frac{31}{4} = 7,75 \text{ €} \end{aligned}$$

Nota: sería el promedio de los premios obtenidos por décimo si pudiéramos comprar una cantidad enorme de décimos al azar. Dicho promedio se iría acercando a 7,75€ por décimo.

4) Hasta ahora hemos calculado cuánto premio se espera ganar en promedio ; al costar cada décimo 20€, la ganancia neta esperada por décimo es de $7,75 - 20 = -12,25€$ (la pérdida media esperada por décimo es de 12,25€)
Como apostamos 20€ por décimo, la pérdida sería (por euro apostado) de:

$$\frac{12,25}{20} = \mathbf{0,6125 \text{ €}}$$

Nota: eso significa que por cada euro apostado esperaríamos perder una media de 61,25 céntimos.

5) Si compramos 10 décimos diferentes el total apostado es de 200€; como la esperanza de un premio para un décimo es de 7,75€, para 10 décimos distintos se esperan 77,50€.

La ganancia media esperada sería de $77,50 - 200 = -122,50€$; así que la pérdida media para diez décimos sería de 122,50€.

Y la esperanza de ganancia por euro apostado es de $\frac{122,50}{200} = \mathbf{0,6125 \text{ €}}$ (sigue siendo la misma). No cambia la conclusión anterior.

Luego, comprar más décimos aumenta las cantidades absolutas que podemos ganar o perder pero no cambia en absoluto la esperanza por euro apostado.