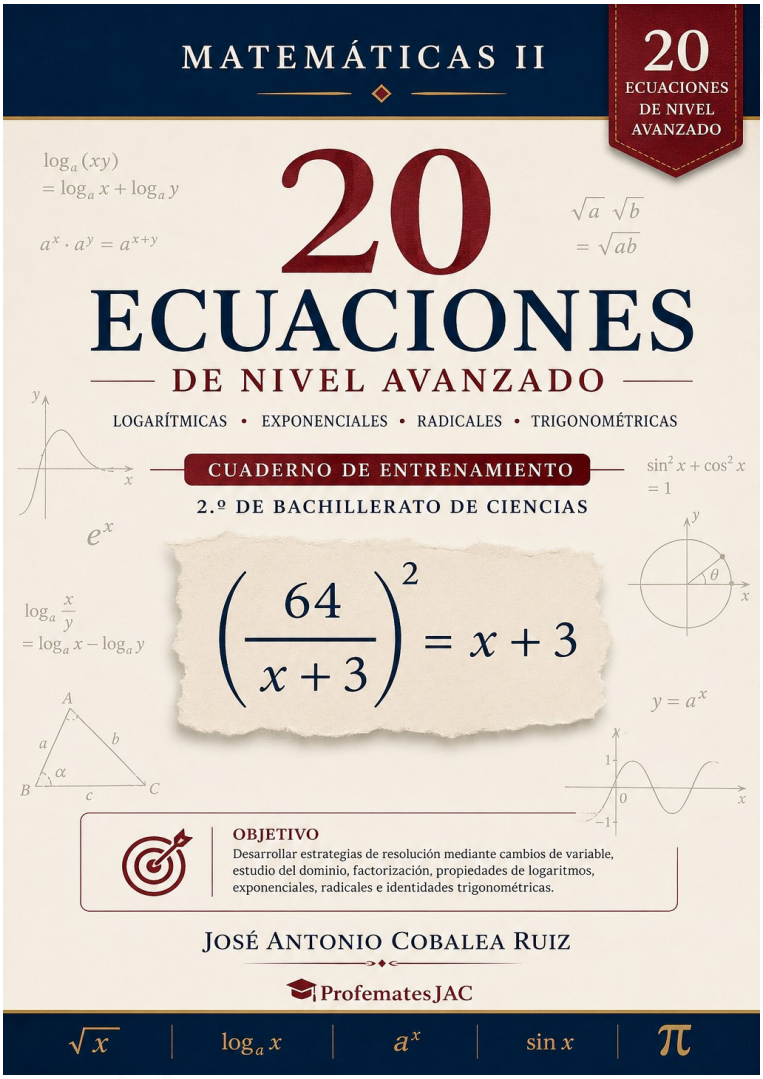
Solución a “20 ecuaciones de nivel avanzado”

(2º Bachillerato Ciencias)

Enunciado:



Resuelve las siguientes ecuaciones de forma razonada, indicando todas las soluciones reales, si existen:

1) $\left(\frac{64}{x+3}\right)^2 = x+3$

2) $3^{x+2} = 27^{2-x}$

3) $4^{x+1} = 8^{3-x}$

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND https://profematesjac.wordpress.com/

4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-1}=8$

5) $\sqrt{x+4}=6-\sqrt{x}$

6) $\log_2(x+5)=2+\log_2(x-3)$

7) $\log_3(x-1)+\log_3(x+5)=3$

8) $(\log_2 x)^2+6=5\cdot\log_2 x$

9) $2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0$

10) *Resuelve para* $0<x<2\pi$: $2\cdot(sen\,x)^2-3\cdot sen\,x+1=0$

11) *Resuelve para* $\frac{-2\pi}{3}<x<2\pi$: $2\cdot(\cos x)^2+\cos x=1$

12) $\sqrt{x+9}=\frac{15}{x+1}$

13) $\left(\frac{125}{x-2}\right)^2+2=x$

14) $\sqrt{5x-4}-\sqrt{x-4}=2$

15) $5^{2x}+25=26\cdot 5^x$

16) $\log(x+2)-1=\log\left(\frac{1}{x-2}\right)$

17) *Resuelve para* $-2\pi<x<3\pi$: $2\cdot sen\,x=\cos x$

18) $\sqrt{x+\sqrt{x+9}}=3$

19) $2^{1+x}+2^{1-x}=5$

20) $3^x+3^{-x}=10$

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND https://profematesjac.wordpress.com/

Solución:

1) $\left(\frac{64}{x+3}\right)^2 = x+3$; $(x+3)^3 = 64^2 = 2^{12} = (2^4)^3 \Rightarrow x+3 = 2^4 \Rightarrow \boldsymbol{x=13}$

2) $3^{x+2} = 27^{2-x}$; $3^{x+2} = (3^3)^{2-x} = 3^{6-3x} \Rightarrow x+2 = 6-3x \Leftrightarrow \boldsymbol{x=1}$

3) $4^{x+1} = 8^{3-x}$; $(2^2)^{x+1} = (2^3)^{3-x} \Leftrightarrow 2^{2x+2} = 2^{9-3x} \Rightarrow 2x+2 = 9-3x \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{7}{5}}$

4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-1}=8$; $\sqrt{2x-1} = 8-\sqrt{x+7} \Rightarrow 2x-1 = 64-16\sqrt{x+7}+x+7$ *(elevando al cuadrado ambos miembros)*

$16\sqrt{x+7} = 72-x \Rightarrow 256(x+7) = 5184-144x+x^2 \Leftrightarrow x^2-400x+3392=0$ *(volviendo elevar al cuadrado y agrupando términos)*

Sus posibles soluciones son: $x_1 = 200+16\sqrt{143} \approx 391{,}332$ y $x_2 = 200-16\sqrt{143} \approx 8{,}667$

Al sustituir en la ecuación original vemos que la solución es:

$$\boldsymbol{x = 200-16\sqrt{143} \approx 8{,}667}$$

5) $\sqrt{x+4} = 6-\sqrt{x}$; $x+4 = 36-12\cdot\sqrt{x}+x \Leftrightarrow 12\cdot\sqrt{x} = 32 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{64}{9}$

La solucion de la misma es $\boldsymbol{x=\frac{64}{9}}$.

6) $\log_2(x+5) = 2+\log_2(x-3)$; $\log_2(x+5)-\log_2(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x+5}{x-3}\right) = 2$

https://profematesjac.wordpress.com/

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND https://profematesjac.wordpress.com/

$$\frac{x+5}{x-3}=4\Rightarrow x+5=4x-12\Leftrightarrow 3x=17\Leftrightarrow x=\frac{17}{3}$$

7) $\log_3(x-1)+\log_3(x+5)=3$; $\log_3\left((x-1)\cdot(x+5)\right)=3$

De donde: $(x-1)\cdot(x+5)=27\Leftrightarrow x^2+4x-32=0$, cuyas soluciones son 4 y -8. Lógicamente al sustituirlas en la ecuación original la única posible es 4.

Así pues: $x=4$

8) $(\log_2 x)^2+6=5\cdot\log_2 x$; llamemos $z=\log_2 x$, entonces nuestra ecuación se nos queda en la forma: $z^2+6=5z\Leftrightarrow z^2-5z+6=0$, cuyas soluciones son $z_1=2$ y $z_2=3$.

Si $z_1=2$ entonces: $\log_2 x=2\Leftrightarrow x=4$

Si $z_2=3$ entonces: $\log_2 x=3\Leftrightarrow x=8$

Sustituyendo en la ecuación original ambas son soluciones.

9) $2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0$; dicha ecuación sería $\left(2^x\right)^2-10\cdot 2^x+16=0$

Si llamamos $z=2^x$ nos queda $z^2-10\cdot z+16=0$, cuyas soluciones son $z_1=2$ y $z_2=8$.

Y por tanto: $2^x=2\Leftrightarrow x=1$ y $2^x=8\Leftrightarrow x=3$. Aquí tenemos dos soluciones.

10) para $0<x<2\pi$, $2\cdot(sen\,x)^2-3\cdot sen\,x+1=0$.

Llamemos $z=sen\,x$. Entonces nos queda la ecuación: $2z^2-3z+1=0$, cuyas soluciones son $z_1=\frac{1}{2}$ y $z_2=1$.

Si $z_1=\frac{1}{2}$, $sen\,x=\frac{1}{2}$ y, por tanto, en el intervalo que nos piden:

$$x=\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}$$

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND https://profematesjac.wordpress.com/

Si $z_2=1$, $sen\, x=1$ y, por tanto, en el intervalo que nos piden: $x=\frac{\pi}{2}$.

Aquí tenemos tres soluciones.

11) para $\frac{-2\pi}{3}<x<2\pi$, $2\cdot(\cos x)^2+\cos x=1$

Llamemos $z=\cos x$, entonces tenemos: $2z^2+z=1\Leftrightarrow 2z^2+z-1=0$, cuyas soluciones son $z_1=\frac{1}{2}$ y $z_2=-1$.

Si $z_1=\frac{1}{2}$ entonces $\cos x=\frac{1}{2}$ y, por tanto, en el intervalo que nos piden:

$$x=\frac{-\pi}{3}\vee x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{3}$$

Si $z_2=-1$ entonces $\cos x=-1$ y, por tanto, en el intervalo que nos piden:

$$x=\pi$$

Aquí tenemos cuatro soluciones.

12) $\sqrt{x+9}=\frac{15}{x+1}$; $x+9=\frac{225}{(x+1)^2}\Rightarrow(x+9)\cdot(x+1)^2=225\Leftrightarrow x^3+11x^2+19x-216=0$

Esta ecuación no tiene soluciones enteras, así que las buscaremos por aproximación. Además **x > -1** pues el primer miembro es positivo.

Considerando el polinomio $P(x)=x^3+11x^2+19x-216$

P(3)=-33 <0

P(4)=100 >0

Hay una solución entre 3 y 4.

P(3,2)=-9,792<0

P(3,3)=2,427>0

Dicha solución se halla entre 3,2 y 3,3.

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND https://profematesjac.wordpress.com/

Si seguimos con el proceso de aproximación dicha solución es: $x \approx 3{,}280405$

Veamos que es la única solución.

Derivamos dicho polinomio obteniendo: $P'(x)=3x^2+22x+19$. Al factorizarlo obtenemos $P'(x)=(x+1)\cdot(3x+19)$.

Como x > -1, ambos factores de P´(x) son positivos. Luego la derivada siempre es positiva para x > -1. Eso significa que el polinomio P(x) es estrictamente creciente para x > -1. Al tratarse de una función continua sólo puede tener como máximo una raíz (la obtenida anteriormente).

13) $\left(\frac{125}{x-2}\right)^2+2=x$; $\frac{15625}{(x-2)^2}=x-2 \Rightarrow (x-2)^3=15625=25^3 \Leftrightarrow x-2=25 \Leftrightarrow x=27$

14) $\sqrt{5x-4}-\sqrt{x-4}=2$; $\sqrt{5x-4}=2+\sqrt{x-4} \Rightarrow 5x-4=4+4\cdot\sqrt{x-4}+x-4$ *(tras elevar al cuadrado)*; luego:

$4x-4=4\cdot\sqrt{x-4} \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x-4} \Rightarrow (x-1)^2=x-4 \Leftrightarrow x^2-3x+5=0$ que no tiene soluciones reales.

Por tanto: ***nuestra ecuación irracional original no tiene solución real***.

15) $5^{2x}+25=26\cdot5^x$; $(5^x)^2-26\cdot5^x+25=0$. Llamemos $z=5^x$, entonces nos queda la ecuación: $z^2-26z+25=0$, cuyas soluciones son $z_1=1$ y $z_2=25$.

Por lo que:

Si $z_1=1=5^x$ entonces $x=0$

Si $z_2=25=5^x$ entonces $x=2$

Las soluciones son $x=0$ y $x=2$

16) $\log(x+2)-1=\log\left(\frac{1}{x-2}\right)$; equivale a:

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND https://profematesjac.wordpress.com/

$\log(x+2)-1=\log 1-\log(x-2)\Leftrightarrow\log(x+2)+\log(x-2)=1\Leftrightarrow\log\left((x+2)\cdot(x-2)\right)=1$

Por lo que: $(x+2)\cdot(x-2)=10\Leftrightarrow x^2-4=10\Leftrightarrow x^2=14\Rightarrow x=\sqrt{14}$ (nótese que x no puede ser $-\sqrt{14}$, pues en ese caso $x+2$ sería negativo).

Solución: $x=\sqrt{14}$

17) $2\cdot sen\,x=\cos x$ para $-2\pi<x<3\pi$

Dividimos nuestra ecuación entre $\cos x$ (nótese que dicho valor no puede ser cero porque, en ese caso, también lo sería el $sen\,x$ y eso no puede ocurrir).

$2\cdot\tan x=1\Leftrightarrow\tan x=\frac{1}{2}$; o sea: $x=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}4636\ rad$ (ángulo del primer cuadrante). Como la función tangente tiene un período de π radianes, la solución general de dicha ecuación es:

$x=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+k\cdot\pi$, donde $k\in\mathbb{Z}$.

Pero hemos de ver cuáles están dentro del intervalo $(-2\pi,\ 3\pi)$. Así que damos valores a $k\in\mathbb{Z}$ y comprobamos:

k	x	¿Pertenece al intervalo?
-3	-8,96113035176857	NO
-2	-5,81953769817878	Sí
-1	-2,67794504458899	Sí
0	0,463647609000806	Sí
1	3,6052402625906	Sí
2	6,74683291618039	Sí
3	9,88842556977019	NO

Así pues las cinco soluciones de este ejercicio son:

$x_1=arctan\left(\frac{1}{2}\right)-2\cdot\pi$, $x_2=arctan\left(\frac{1}{2}\right)-\pi$, $x_3=arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, $x_4=arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\pi$ y $x_5=arctan\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot\pi$ *(todas en radianes, correspondiendo sus valores a los valores correspondientes de la columna **x** en la tabla)*

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND https://profematesjac.wordpress.com/

18) $\sqrt{x+\sqrt{x+9}}=3$; $x+\sqrt{x+9}=9\Leftrightarrow\sqrt{x+9}=9-x\Rightarrow x+9=81-18x+x^2\Leftrightarrow x^2-19x+72=0$

cuyas soluciones son $x_1=\frac{19+\sqrt{73}}{2}$ y $x_1=\frac{19-\sqrt{73}}{2}$ (soluciones potenciales; tenemos que comprobarlas en la ecuación original).

Si tomamos como $x=\frac{19+\sqrt{73}}{2}$, vemos que $\sqrt{x+\sqrt{x+9}}\approx 4{,}306\neq 3$

Si tomamos como $x=\frac{19-\sqrt{73}}{2}$, vemos que $\sqrt{x+\sqrt{x+9}}=3$

Por tanto la solución de esta ecuación es: $\boldsymbol{x=\frac{19-\sqrt{73}}{2}}$

19) $2^{1+x}+2^{1-x}=5$; esa ecuación se corresponde con $2\cdot 2^x+\frac{2}{2^x}=5$; multiplicándola por 2^x obtenemos: $2\cdot(2^x)^2+2=5\cdot 2^x\Leftrightarrow 2\cdot(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$; hacemos el cambio de variable $z=2^x$, con lo que tenemos:

$2\cdot z^2-5z+2=0$, cuyas soluciones son: $z_1=2$ y $z_2=\frac{1}{2}$.

Si $z=2$ entonces $x=1$ y si $z=\frac{1}{2}$ entonces $x=-1$.

Las soluciones de esta ecuación son x=1 y x=-1.

20) $3^x+3^{-x}=10$; $3^x+\frac{1}{3^x}=10\Leftrightarrow 3^x\cdot 3^x+1=10\cdot 3^x\Leftrightarrow(3^x)^2-10\cdot 3^x+1=0$; hacemos el cambio de variable $z=3^x$ obteniendo: $z^2-10\cdot z+1=0$, cuyas soluciones son $z_1=5+2\cdot\sqrt{6}$ y $z_2=5-2\cdot\sqrt{6}$

Si $z=5+2\cdot\sqrt{6}$ entonces $3^x=5+2\cdot\sqrt{6}$; luego $\boldsymbol{x=log_3(5+2\cdot\sqrt{6})}$ *(solución)*

Si $z=5-2\cdot\sqrt{6}$ entonces $3^x=5-2\cdot\sqrt{6}$; luego $\boldsymbol{x=log_3(5-2\cdot\sqrt{6})}$ *(otra solución)*

Tenemos dos soluciones para esta ecuación.

https://profematesjac.wordpress.com

© José Antonio Cobalea CC BY-NC-ND